$\triangle$OAB において，点 G を

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

である点とする。

また，2 点 P，Q を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=p\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=q\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $(0<p<1,\ 0<q<1)$ である点とし，$\triangle$OAB と $\triangle$OPQ の面積をそれぞれ S，S' とする。

(1) 点 G が $\triangle$OAB の内部にあるとき，k の満たすべき条件を求めよ。ただし，$\triangle$OAB の内部とは，$\triangle$OAB で囲まれる部分からその周を除いた部分をさす。

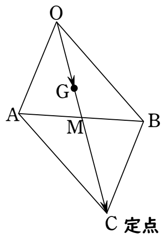
(2) 3 点 G，P，Q が同一直線上にあるとき，k を p，q を用いて表せ。

(3) $k=\dfrac{1}{4}$ であって，3 点 G，P，Q が同一直線上にあるとき，$\dfrac{S'}{S}$ の最小値を求めよ。

＜ ’97 九州大 改 ＞

【戦略 1】

(1) **k 倍する前の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が表す点は定点なわけですから，イメージとしては**



というように，定ベクトルの伸縮で G の位置が決まるイメージです。

$\triangle$OAB の内部ということだと，線分 AB の中点 M に注目し

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\square\ \overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

というように，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ の伸縮と見て，倍率の $\square$ が $0<\square<1$ と見ればよいでしょう。

(2) **「点 G が線分 PQ 上にある」ということの翻訳は**

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=s\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\ \text{の形で表したとき，}s+t=1\quad\begin{pmatrix}0<s<1\\0<t<1\end{pmatrix}$$

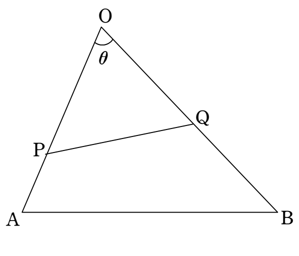
です。（係数足して 1 ならば，先っちょ通る直線上）

(3) **角度を共有する三角形の面積比 $\dfrac{\triangle\mathrm{OPQ}}{\triangle\mathrm{OAB}}$ は**

$$\frac{\triangle\mathrm{OPQ}}{\triangle\mathrm{OAB}}=\frac{\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\sin\theta}{\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\theta}$$

$$=\frac{p|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cdot q|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$$

$$=pq$$



というようにシンプルに立式できます。

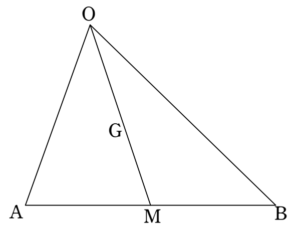
(2) で，$k=\dfrac{pq}{p+q}$ で，$k=\dfrac{1}{4}$ であることから，

$$p+q=4pq$$

という和と積の条件を得て，pq という積の最小値を考えるので相加平均・相乗平均をインスピレーションしたいところです。

【解 1】

(1) 線分 AB の中点を M とする。



$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=2k\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$
$$=2k\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

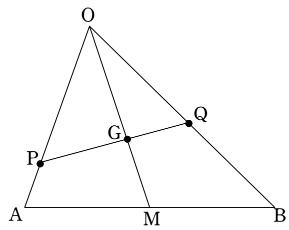
と表せる。

G が $\triangle$OAB の内部にあるための条件は $0<2k<1$

すなわち $0<k<\dfrac{1}{2}$ …答

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$=\frac{k}{p}\left(p\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\frac{k}{q}\left(q\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$
$$=\frac{k}{p}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{k}{q}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$



点 G が線分 PQ 上にあるため

$$\frac{k}{p}+\frac{k}{q}=1\quad\left(※\ \frac{k}{p}>0,\ \frac{k}{q}>0\ \text{は満たしている}\right)$$

これより，$k\cdot\dfrac{p+q}{pq}=1$ で，$k=\dfrac{pq}{p+q}$ …答

(3) $\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とおくと，

$$\frac{S'}{S}=\frac{\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\sin\theta}{\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\theta}$$
$$=\frac{p|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cdot q|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$$
$$=pq$$

$k=\dfrac{1}{4}$，及び (2) の結果から $\dfrac{pq}{p+q}=\dfrac{1}{4}$，すなわち $p+q=4pq$ …①

$p>0$，$q>0$ であるため，相加平均・相乗平均の関係から

$$p+q\geqq 2\sqrt{pq}$$

であり，① より，$4pq\geqq 2\sqrt{pq}$ を得る。

両辺 $2\sqrt{pq}$（>0）で割ると，$2\sqrt{pq}\geqq 1$，すなわち $\sqrt{pq}\geqq\dfrac{1}{2}$

両辺 2 乗すると，$pq\geqq\dfrac{1}{4}$ を得る。

等号成立は $p=q$ のときで，このとき ① より $p+p=4p^2$

$p>0$ を考えると $p=\dfrac{1}{2}$ で，このとき $q=\dfrac{1}{2}$

以上から，$\dfrac{S'}{S}$（$=pq$）の最小値は $\dfrac{1}{4}$ …答

【戦略 2】(3) について

従属 2 変数関数の最小値問題ととらえ，文字消去し，微分法でゴリゴリ仕留める路線が目についた人もいるでしょう。

【解 2】(3) 部分的処理

(3)　$p+q=4pq$，$\dfrac{S'}{S}=pq$ **を得る部分は【解 1】と同じ**

$p=\dfrac{1}{4}$ とすると，$q+\dfrac{1}{4}=q$ となり不合理であるため，$p\neq\dfrac{1}{4}$

これより，$q=\dfrac{p}{4p-1}$

また，$0<q<1$ であるため，$0<\dfrac{p}{4p-1}<1$

左の不等式，及び $p>0$ から，$4p-1>0$，すなわち $p>\dfrac{1}{4}$

このとき，右の不等式から $p<4p-1$，すなわち $p>\dfrac{1}{3}$

以上から $\dfrac{1}{3}<p<1$

今，
$$\begin{aligned}\frac{S'}{S}&=pq\\&=\frac{p^2}{4p-1}\\&=\frac{1}{4}p+\frac{1}{16}+\frac{\frac{1}{16}}{4p-1}\\&=\frac{1}{16}\left(4p+\frac{1}{4p-1}+1\right)\end{aligned}$$

仮分数→帯分数
商$+\dfrac{\text{余り}}{4p-1}$

$f(p)=4p+\dfrac{1}{4p-1}$ とおくと

$$\begin{aligned}f'(p)&=4-\frac{4}{(4p-1)^2}\\&=4\cdot\frac{(4p-1)^2-1}{(4p-1)^2}\\&=4\cdot\frac{8p(2p-1)}{(4p-1)^2}\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{3}<p<1$ の範囲では

p	$\left(\frac{1}{3}\right)$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(p)$		$-$	0	$+$	
$f(p)$	$\left(\frac{13}{3}\right)$	↘	3	↗	$\left(\frac{13}{3}\right)$

$p=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\dfrac{S'}{S}=\dfrac{1}{16}\left\{f\left(\dfrac{1}{2}\right)+1\right\}=\dfrac{1}{4}$

よって，$\dfrac{S'}{S}$ は $p=\dfrac{1}{2}$ で最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる… 答

【総括】

決して派手な問題ではありませんが，ベクトルの扱いにおける各種基本が問われつつ，従属 2 変数の最小問題がオチという，実戦的な良問です。

【解 2】の文字消去路線で行く場合，「文字が死んだら遺産の整理」という言葉を忘れず，生き残る p の範囲に注意しましょう。