n を 2 以上の正の整数とする。n 次関数

$$f(x)=x^n+nx^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$$

が導関数 $f'(x)$ で割りきれるとき，$f(x)$ を求めよ。

＜ '94 埼玉大 改 ＞

【戦略 1】

条件を素直に立式しようと考え，次数も考慮すると

$$f(x)=f'(x)(px+q)$$

ということになるでしょう。

本問は，x^n，x^{n-1} の係数のみ作為的であるため，この係数比較をすることで p，q が導出可能であることを睨みたいところです。

具体的に書き下すと，右辺は

$$\{nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}+(n-2)a_{n-2}x^{n-3}+\cdots\cdots+a_1\}(px+q)$$

ということになるため，x^n の項，x^{n-1} の項はそれぞれ

$$npx^n,\ \{qn+pn(n-1)\}x^{n-1}$$

です。

ここから，$\begin{cases} pn=1 \\ qn+pn(n-1)=n \end{cases}$ と立式でき，$p=\dfrac{1}{n}$，$q=\dfrac{1}{n}$ を得ます。

これにより，$f(x)=\dfrac{1}{n}f'(x)(x+1)$ という関係式を得ます。

ここから先は，この微分方程式を解くということに帰着されるわけですが，

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ の形を作って，両辺積分する

という流れ (変数分離法) で捌くのが第 1 感でしょうか。

【解 1】

n 次関数 $f(x)$ に対して，$f'(x)$ は $n-1$ 次であるため，$f(x)$ が $f'(x)$ で割り切れるという条件から

$$f(x)=f'(x)(px+q)\ \cdots(*)$$

と表せる。

$f(x)=x^n+nx^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$ に対して

$$f'(x)=nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}+(n-2)a_{n-2}x^{n-3}+\cdots\cdots+a_1$$

ゆえに

$$\begin{aligned} &x^n+nx^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots\cdots+a_1x+a_0 \\ &\quad=\{nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}+(n-2)a_{n-2}x^{n-3}+\cdots\cdots+a_1\}(px+q) \end{aligned}$$

右辺の x^n の項，x^{n-1} の項はそれぞれ npx^n，$\{qn+pn(n-1)\}x^{n-1}$

ゆえに，両辺の x^n，x^{n-1} の係数を比較すると

$$\begin{cases} pn=1 & \cdots① \\ qn+pn(n-1)=n & \cdots② \end{cases}$$

① より，$p=\dfrac{1}{n}$

② に代入すると，$qn+(n-1)=n$，すなわち $q=\dfrac{1}{n}$

$(*)$ にこれらを代入すると，$f(x)=f'(x)\left(\dfrac{1}{n}x+\dfrac{1}{n}\right)$，すなわち

$$f(x)=\frac{1}{n}f'(x)(x+1)$$

となり，

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{n}{x+1}$$

両辺 x で積分すると，

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=n\int\frac{1}{x+1}\,dx$$

$$\log|f(x)|=n\log|x+1|+C\ \ (C\ \text{は定数})$$

$$\log|f(x)|=\log e^C|x+1|^n$$

$$|f(x)|=e^C|x+1|^n$$

符号も含めて，

$$f(x)=A(x+1)^n\ \ (A\ \text{は定数})$$

と表せる。

両辺の x^n の係数を考えると，$A=1$ であるため

$$f(x)=(x+1)^n\ \cdots\text{答}$$

【戦略 2】微分方程式の処理

$$f(x)=\frac{1}{n}f'(x)(x+1)$$

という微分方程式を， $f'(x)-\dfrac{n}{x+1}f(x)=0$ **と見て，**

両辺 $e^{-n\log|x+1|}$ **をかける**

という作業をすると

$$f'(x)\cdot e^{-n\log|x+1|}-\frac{n}{x+1}e^{-n\log|x+1|}f(x)=0$$

$$\{f(x)e^{-n\log|x+1|}\}'=0$$

と，まとまります。

これにより， $\dfrac{f(x)}{e^{\log|x+1|^n}}=C$ （C は定数）**と表せるため，**

$$f(x)=C|x+1|^n$$

となります。

【解 1】同様，絶対値において± の符号については定数部分に担ってもらうとして

$$f(x)=A(x+1)^n \quad (A \text{ は定数})$$

と捌きます。

【解 2】微分方程式の処理

$f(x)=\dfrac{1}{n}f'(x)(x+1)$ を得るまでは【解 1 】と同じ

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

$f'(x)-\dfrac{n}{x+1}f(x)=0$ であるため，両辺 $e^{-n\log|x+1|}$ をかけると

$$f'(x)\cdot e^{-n\log|x+1|}-\frac{n}{x+1}e^{-n\log|x+1|}f(x)=0$$

$$\{f(x)e^{-n\log|x+1|}\}'=0$$

これより，

$$\frac{f(x)}{e^{\log|x+1|^n}}=C \quad (C \text{ は定数})$$

$e^{\log|x+1|^n}=|x+1|^n$ であるため，$f(x)=C|x+1|^n$

符号も考慮すると，

$$f(x)=A(x+1)^n \quad (A \text{ は定数})$$

と表せる。

両辺の x^n の係数を考えると，$A=1$ であるため

$$f(x)=(x+1)^n \quad \cdots \text{答}$$

【総括】

$$f(x)=f'(x)(px+q)$$

という形の微分方程式を解く問題であるということをどの段階で意識できたかが差を生む要因となったでしょう。

x^n，x^{n-1} の係数だけ手が加えられているという作為も見逃したくありません。

【解 2】の方法（積分因子法）については，誘導なしの初見ではまず不可能ですが，難関大受験生においては知っておいて損はないものです。
（受験的にももちろんそうですが，教養的にも）

なお，両辺 $e^{-n\log|x+1|}$ をかけるくだりの $e^{-n\log|x+1|}$ ってどこから出てきたんだ？という方は

実践演習：微分方程式【積分因子法】

をご覧ください。