整数 a，b は等式

$$3^a-2^b=1 \quad \cdots ①$$

を満たしているとする。

(1) a，b はともに正となることを示せ。

(2) $b>1$ ならば，a は偶数であることを示せ。

(3) ① を満たす整数の組 (a, b) をすべてあげよ。

＜ '18 東北大 ＞

【戦略 1】

(1) a が負だと速攻でヤバいことに気がつくと思います。

ヤバさの根っこは，$a<0$ だと，$3^a<1$ なので，① の左辺が 1 より小さくなってしまうという部分です。
逆に言えば，$3^a>1$ じゃないとまずいわけで，$3^a>1$ となる根拠を探せばよいことになります。

$a>0$ が言えれば，$2^b=3^a-1>3^1-1>1$ なので，$b>0$ も即答です。

(2) ひとまず累乗数を左辺と右辺に分けて $3^a=2^b+1$ と見たいと思います。

累乗根の性質として，
「累乗数を何かで割った余りは限られる」
というものがあり，そこから攻め落とすことを考えます。

2^b+1 が 3 の倍数となっていなければならないことから，2^n+1 という形の整数を 3 で割った余りについて調べます。

$f(n)=2^n+1$ に対して，

$$f(1)=3\equiv 0 \pmod 3$$
$$f(2)=5\equiv 2 \pmod 3$$
$$f(3)=9\equiv 0 \pmod 3$$
$$f(4)=17\equiv 2 \pmod 3$$

なので，$f(n)$ を 3 で割った余りは 0，2 の繰り返しだと予想できます。

この先の周期性を裏付けるためには，$f(n+2)\equiv f(n) \pmod 3$，
すなわち $f(n+2)-f(n)$ が 3 の倍数であることが言えれば OK です。

これが言えれば，$2^b+1\ (=f(b))$ が 3 の倍数（3 で割って余り 0）とならなければならないことから，b が奇数であることが分かります。

$b>1$ という条件の下では，b は 3 以上の奇数ということになり
$b=2B+1$ と表せます。

このとき，$3^a=2\cdot 4^B+1$ となります。

右辺を 4 で割った余りが 1 なので，3^a を 4 で割った余りも 1 でなければなりません。

先ほど同様，$g(n)=3^n$ として，3^n を 4 で割った余りを調べると
余りは 3，1，3，1 と繰り返すため，3^a を 4 で割った余りが 1 となるためには a が偶数でなければならないことになり，解決です。

(3) (2) という強力なヒントがあり，$b=1$ のときと $b>1$ のときで分けて考えたいところです。

$b=1$ のときは $3^a-2=1$，すなわち $3^a=3$ なので $a=1$ となり瞬殺です。

$b>1$ のときは (2) から a は偶数で，$a=2m\ (m=1, 2, \cdots)$ と表せることになります。

このとき，$3^{2m}-2^b=1$ ですが，偶数乗があるため，因数分解が狙っていけます。

つまり，$3^{2m}-1=2^b$ と見て，$(3^m+1)(3^m-1)=2^b$ としたいわけです。

右辺の素因数は 2 しかありませんから，$\begin{cases}3^m+1=2^{\bigcirc}\\3^m-1=2^{\square}\end{cases}$ という形となるしかありません。

（○，□ はダサいので，$\begin{cases}3^m+1=2^{\alpha}\\3^m-1=2^{\beta}\end{cases}$ としておきます。）

ここから m を消去するために辺々引くと

$2^\alpha-2^\beta=2$ となりますが，$\alpha>\beta$ という大小関係的に
2^β の方が素因数 2 の個数を握っている
ということをスムーズに見抜きたいところです。

$$2^\beta(2^{\alpha-\beta}-1)=2$$

と，左辺の素因数 2 の個数が見えるように括ってやると，明確で
$\beta=1$ であることが分かります。（大小関係的に $\alpha-\beta>0$ で，$2^{\alpha-\beta}-1$ は奇数）

ここから先は消化試合で，芋づる式に全て求まっていきます。

【解答】

(1) $3^a=2^b+1>1$ であるため，$3^a>3^0$

3は1より大きいため，$a>0$

このとき，$2^b=3^a-1>3^1-1>1$ であり，$2^b>2^0$

2は1より大きいため，$b>0$

以上から，a，b は正である。

(2) $3^a=2^b+1$ …②

$f(n)=2^n+1$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とすると

$$\begin{cases} f(1)=3\equiv 0 \pmod 3 \\ f(2)=5\equiv 2 \pmod 3 \end{cases} \cdots ③$$

また，正の整数 n に対して

$$\begin{aligned} f(n+2)-f(n)&=(2^{n+2}+1)-(2^n+1) \\ &=2^{n+2}-2^n \\ &=2^n(2^2-1) \\ &=3\cdot 2^n \\ &\equiv 0 \pmod 3 \end{aligned}$$

したがって，$f(n+2)\equiv f(n) \pmod 3$ ということになり，
$f(n)$，$f(n+2)$ を3で割った余りは等しい。 …④

③，④ より，$f(n)$ を3で割った余りは $\begin{cases} n \text{ が偶数のとき } 2 \\ n \text{ が奇数のとき } 0 \end{cases}$

ゆえに，② を満たす整数 b が存在するとしたら，$2^b+1\ (=f(b))$ が3の倍数となることから，b は奇数である。

$b>1$ という条件より，b は3以上の奇数ということで
$b=2B+1$ $(B=1,2,\cdots)$ と表せる。

このとき，② から，
$$\begin{aligned} 3^a&=2^{2B+1}+1 \\ &=2\cdot 4^B+1 \quad \cdots ②' \end{aligned}$$

$g(n)=3^n$ $(n=1,2,\cdots)$ に対し，$\begin{cases} g(1)=3\equiv 3 \pmod 4 \\ g(2)=9\equiv 1 \pmod 4 \end{cases}$ …⑤

$$\begin{aligned} g(n+2)-g(n)&=3^{n+2}-3^n \\ &=3^n(3^2-1) \\ &=8\cdot 3^n \\ &\equiv 0 \pmod 4 \end{aligned}$$

したがって，$g(n+2)\equiv g(n) \pmod 4$ ということになり，
$g(n)$，$g(n+2)$ を4で割った余りは等しい。…⑥

⑤，⑥ より $g(n)$ を4で割った余りは $\begin{cases} n \text{ が偶数のとき } 1 \\ n \text{ が奇数のとき } 3 \end{cases}$

②′ の右辺は4で割って1余るため，②′ を満たす整数 a があるとしたら $3^a\ (=g(a))$ が4で割って1余ることになり，a は偶数。

以上から，$b>1$ であるとき，a は偶数である。

(3) $b=1$ のとき ① は $3^a-2^1=1$，すなわち $3^a=3$ であり，$a=1$

以後 $b>1$ のときを考える。

このとき (2) より a は偶数で，$a=2m$ $(m=1,2,\cdots)$ とおける。

① は

$$\begin{aligned} 3^{2m}-2^b=1 &\iff 3^{2m}-1=2^b \\ &\iff (3^m+1)(3^m-1)=2^b \end{aligned}$$

$3^m+1>3^m-1>0$ に注意すると，

$$\begin{cases} 3^m+1=2^\alpha \\ 3^m-1=2^\beta \end{cases} \quad (\alpha,\ \beta \text{ は } 0\leqq\beta<\alpha \text{ を満たす整数})$$

と表せる。

辺々引くと，$2^\alpha-2^\beta=2$

これより，$2^\beta(2^{\alpha-\beta}-1)=2$ …(*)

$\alpha-\beta$ は正の整数なので，$2^{\alpha-\beta}-1$ は奇数であり，素因数2をもたない。

ゆえに，(*) の両辺の素因数2の個数を比較すると $\beta=1$

このとき，(*) より，$2^{\alpha-1}-1=1$，すなわち $2^{\alpha-1}=2$ で $\alpha=2$ を得る。

したがって，$\begin{cases} 3^m+1=4 \\ 3^m-1=2 \end{cases}$ となり，$3^m=3$，すなわち $m=1$ を得る。

これより，$a=2m=2$

このとき，$3^2-2^b=1$，すなわち $2^b=8$ であり，$b=3$

以上から，① を満たす整数の組 (a,b) は

$$(a,b)=(1,1),(2,3) \cdots 答$$

【戦略 2】(2) の部分的方針について ～方針のみ～

2^n+1 を 3 で割った余りを考えるくだりでは

$$\begin{aligned}2^n+1&=(3-1)^n+1\\&\equiv(-1)^n+1 \pmod 3\end{aligned}$$

であることから， $\begin{cases} n \text{ が奇数のとき } 2^n+1\equiv 0 \pmod 3 \\ n \text{ が偶数のとき } 2^n+1\equiv 2 \pmod 3\end{cases}$

と二項定理の活用を考えるのも常套手段の 1 つです。

二項定理？と思った人へ

$(3-1)^n+1$
$={}3^n+{}_nC_1\,3^{n-1}\cdot(-1)+{}_nC_2\,3^{n-2}\cdot(-1)^2+\cdots+{}_nC_{n-1}\,3^1\cdot(-1)^{n-1}+(-1)^n+1$
$=(3\text{ の倍数})+(-1)^n+1$

の (3 の倍数) (**←** 3 **で割った余りに影響しない部分**) **を無視して，**
$\equiv(-1)^n+1$ **と見ているわけです。**

同様に，3^n を 4 で割った余りを考えるくだりでは

$$3^n=(4-1)^n\equiv(-1)^n \pmod 4$$

であることから， $\begin{cases} n \text{ が奇数のとき } 3^n\equiv -1\equiv 3 \pmod 4 \\ n \text{ が偶数のとき } 3^n\equiv 1 \pmod 4\end{cases}$

と捌けます。

【総括】

指数型の不定方程式は「こういうことをやってみよう」というアイデアのストックが切れ，ガス欠になりやすいでしょう。

整数問題の基本

①：積の形から約数倍数を拾う
②：余りで分類する
③：範囲を絞る

を意識しつつ，何が狙っていけるのかを考えるクセをつけましょう。

累乗数を何かで割った余りが限られる（周期性をもつ）というのは難関大を目指すにあたっては常識にしておきたいところです。

なお，本問はカタラン予想と呼ばれる次の問題の特殊なものです。

x，y，m，n を $x>1$，$y>1$，$m>1$，$n>1$ なる整数とするとき

$$x^m-y^n=1$$

を満たす x，y，m，n の値の組は

$$(x,\ y,\ m,\ n)=(3,\ 2,\ 2,\ 3)$$

に限られる。

1844 年にカタランが予想したこのシンプルな問題はオイラーなど多くの数学者を巻き込みながら部分的に解決していきはしたものの，完全解決までには 158 年の年月を要しました。

2002 年にミハイレスクという数学者によって完全解決され，ミハイレスクの定理と呼ばれています。