　2，3，5，7，11，… のように，1 より大きい整数のうち 1 とそれ自身でしか割り切れない数を素数という。

(1)　p を素数とするとき，$n=p!+1$ は p 以下の素数では割り切れないことを示せ。

(2)　命題

　　「要素が自然数である集合 A が有限集合ならば

　　　　A には最大の要素がある」

　は真である。これを用いて素数全体の集合が無限集合であることを証明せよ。

＜ '01 成城大 ＞

【戦略】

(1)　**$p!$ は $p(p-1)(p-2)\cdots\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ であり，**

　　p 以下の素数で必ず割り切れる

ということが言えます。

よって，$p!+1$ は p 以下の素数で割れば，必ず余り 1 ということになり，割り切れません。

(2)　**無限に要素をもつということを直接的に示すのは困難であることから背理法により仕留める方向性は嗅ぎ取りたいところです。**

素数全体の集合を P として，P が有限集合であると仮定します。

与えられた命題から，この有限集合 P の要素の中には最大値が存在しその素数を p とします。

(1) を活かそうと思うと $n=p!+1$ と設定したくなると思います。

もし n が素数であれば明らかに $n>p$ なので，p より大きい素数が存在してしまうことになり，p が素数の集合 P の最大値であるということに反します。

したがって n は合成数ということになりますが，(1) から n は p 以下の素数では割り切れません。

なので，n を割り切る素因数があるとしたらそれは p より大きいものということになるため，やはり p の最大性に反し，矛盾します。

【解答】

(1)　$p!+1=p(p-1)(p-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1+1$ であり，$2\sim p$ までのどれで割っても 1 余るため，$p!+1$ は p 以下の素数では割り切れない。

(2)　素数全体の集合を P とし，P が有限集合であると仮定する。

与えられた命題により，この有限集合の要素の中には最大の要素が存在し，それを p とする。

このとき，$n=p!+1$ とする。

n が素数であるとすると，n は素数全体の集合 P の要素であるが，$n>p$ なので，p が P の最大の要素であるということに矛盾する。

したがって，n は合成数ということになり，n はある素因数の積で表せる。

また，(1) より，n ($=p!+1$) は p 以下の素数では割り切れないため，有限集合 P の要素である素因数では割り切れない。

したがって，合成数 n の素因数として p より大きい素数の存在が確認され，p が最大の素数であることに矛盾する。

以上から，素数全体の集合 P は無限集合である。

【総括】

誘導付きで標準的な難易度になるように仕立てられていますが，素数が無限に存在することの証明という高級な話題であることには違いありません。

なお，今回の問題に関連して，2 つの事実を紹介します。

①：今回，素数 p に対して $p!+1$ は p で割り切れませんでした。(余り 1)

　ただ，実は $(p-1)!+1$ は p で割り切れ，さらに，

　　p が素数 $\Leftrightarrow$ $(p-1)!+1$ が p で割り切れる

　という同値性も成り立ちます。(ウィルソンの定理)

②：今回の数の作り方に倣って

$$(n+1)!+2,\ (n+1)!+3,\ \cdots\cdots,\ (n+1)!+n,\ (n+1)!+n+1$$

　という n 個の連続した数を考えてみると，$k=2,\ 3,\ \cdots,\ n+1$ に対して，$(n+1)!$ は k で割り切れます。

　つまり，上の n 個の連続した数は全て合成数ということになり素数ではありません。

　これは n 個の連続合成数が作れるということで，もっと言えば

　　任意の長さの素数が現れない区間が作れる

　ということを意味します。(よく素数砂漠と呼ばれます。)