n を 3 以上の自然数とする。

(1) $n!-1$ の 1 より大きい約数は n より大きいことを示せ。

(2) $n<p<n!$ を満たす素数 p が存在することを示せ。

＜ '97 京都教育大 ＞

【戦略】

(1) **$n!-1$ は $2, 3, \cdots, n$ のいずれでも割り切れません。**

したがって，$n!-1$ を割り切る約数があるとしたら n より大きいことになります。

(2) **$n \geqq 3$ であるとき，$n<n!-1<n!$ です。**

$n!-1$ そのものが素数であるときは即題意成立です。

よって，$n!-1$ が素数でない，すなわち合成数であるときを考えることになります。

$n!-1$ が合成数であるとき，少なくとも 1 つ素因数をもつことになります。

それを p とすると，(1) より，この p は $n!-1$ の約数であるため，$n<p$ ということが言えます。

一方で，明らかに $p<n!-1(<n!)$ であるため，この素因数 p は

$$n<p<n!$$

を満たすため，題意成立です。

【解答】

(1) $n!(=n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1)$ は $2, 3, \cdots, n$ で割り切れる。

したがって，$n!-1$ は $2, 3, \cdots, n$ で割り切れることはない。

ゆえに，$n!-1$ の 1 より大きい約数は n より大きい。

(2) $n \geqq 3$ のとき，$n<n!-1<n!$ である。

$n!-1$ が素数であるときは題意を満たすため，以下は $n!-1$ が素数でないとき (合成数であるとき) を考える。

$n!-1$ が合成数であるとき，$n!-1$ は少なくとも 1 つ素因数をもつ

その素因数を p とすると，(1) より，$n<p$ である。

一方，$p<n!-1(<n!)$ である。

以上から，$n<p<n!$ となる素数 p の存在が確認された。

【総括】

素数が存在しない区間 (素数砂漠) というテーマもありますが，本問は素数が存在する区間について扱った問題です。

n に比べて $n!$ は大きいため，n と $n!$ の間に素数が存在するというのは「まぁそりゃそうだよね」と納得できるものではあるでしょう。

この素数が存在する区間については，

ベルトラン・チェビシェフの定理

n を正の整数とするとき，$n<p \leqq 2n$ を満たす素数 p が存在する

という，本問よりも精密な結果が知られています。