n を正の整数とする。$0\leqq a_k\leqq 1$ $(k=1,2,\cdots,n)$ であるとき，

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+n}{2}\right)^2\geqq n\,(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)$$

が成り立つことを証明せよ。

＜自作＞

【戦略】

示すべき不等式の分母を払うと

$$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+n)^2\geqq 4n\,(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)$$

です。

移項すると，$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+n)^2-4n\,(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)\geqq 0$
なのですが，この示すべき不等式の形が

$$\square^2-4\triangle\geqq 0$$

という形をしていることを見逃したくはありません。

もちろん、この形は判別式をインスピレーションしたいところで

$$x^2+(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+n)x+n(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)=0$$

という 2 次方程式を考えたくなります。

この判別式が 0 以上であること，すなわちこの 2 次方程式が実数解を少なくとも 1 つもつということが言えればよいわけです。

$f(x)=x^2+(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+n)x+n(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)$ **とおいたとき，**$f(☆)\leqq 0$ **となるような ☆ の存在が言えればよく，そんな ☆ を探しに行きます。**

ここはもしかしたらある程度の試行錯誤が必要かもしれませんが，

$$f(-n)\leqq 0$$

が見つかりますので，解決です。

あとはそれを逆算的に（天下り的に）記述します。

【解答】

$$f(x)=x^2+(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+n)x+n(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)$$

とおくと，

$$\begin{aligned}f(-n)&=n^2-n\,(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+n)+n\,(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)\\&=n\,\{a_1(a_1-1)+a_2(a_2-1)+\cdots\cdots+a_n(a_n-1)\}\end{aligned}$$

今，$k=1,2,\cdots,n$ に対して $0\leqq a_k\leqq 1$ より，$a_k(a_k-1)\leqq 0$

よって，$f(-n)\leqq 0$

したがって，2 次方程式 $f(x)=0$ は少なくとも 1 つ実数解をもつ。

ゆえに，$f(x)=0$ の判別式を D とすると $D\geqq 0$

$D=(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+n)^2-4n\,(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)$ なので

$$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+n)^2-4n\,(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)\geqq 0$$

すなわち

$$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+n)^2\geqq 4n\,(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)$$

が成立する。

両辺 2^2（$=4$）で割ると

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+n}{2}\right)^2\geqq n\,(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)$$

を得て，題意は示された。

【総括】

$\square^2-4\triangle\geqq 0$ という形から判別式をインスピレーションするわけですが，最初からこの形ではなく，4 倍という部分を $(\quad)^2$ という形に紛れ込ませたため，匂いが消えている部分が難しいでしょう。

形から判別式をインスピレーションする不等式証明としては

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i y_i\right)^2\leqq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i{}^2\right)$$

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2\leqq\int_a^b(f(x))^2\,dx\int_a^b(g(x))^2\,dx$$

というコーシー・シュワルツの不等式が有名です。