下に凸の曲線と直線で囲まれた部分の面積

関数 $y=f(x)$ は区間 $[a\,,\,b]$ で下に凸で，第 2 次導関数は連続であるものとする。

点 $(a\,,\,f(a))$ と $(b\,,\,f(b))$ を通る直線を ℓ とするとき，直線 ℓ と曲線 $y=f(x)$ で囲まれる図形の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)f''(x)\,dx$$

であることを証明せよ。

＜ ’91 鹿児島大 ＞

【戦略】

S を計算してみようという気持ちで話を進めたいと思います。

ひとまずは直線 ℓ の方程式を出すと

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

ですから，S は

$$S=\int_a^b\left\{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)-f(x)\right\}dx$$

という形で立式できます。

目がチカチカしますが，結局は

$$\int_a^b\{(定数)(x-a)+(定数)-f(x)\}\,dx$$

という形に過ぎないと割り切ってゴリゴリと積分計算をかましていきます。

やってみると分かりますが，約分などもされて思っているほどメチャクチャな式とはならず

$$S=\frac{1}{2}(b-a)\{f(a)+f(b)\}-\int_a^b f(x)\,dx$$

という式が得られます。

$f(x)$ が具体的に分からない以上，これをほぐすのは限界です。

そこで，示すべき右辺の $\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)f''(x)\,dx$ を変形して

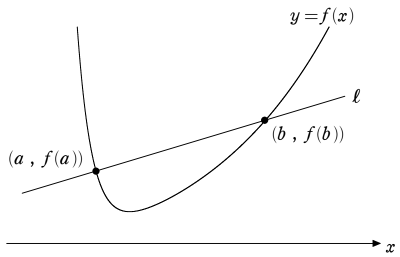
$$\frac{1}{2}(b-a)\{f(a)+f(b)\}-\int_a^b f(x)\,dx$$

となることを目指します。

そうなると $\int \bigcirc f''\,dx$ の形から $\int f(x)\,dx$ を登場させる必要がありますから，$(\quad)'$ の付け替えによる部分積分が頭をよぎります。

あとはそれを実行するのみです。

【解答】



直線 ℓ の方程式は

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

$f(x)$ が下に凸であるため，区間 $[a\,,\,b]$ で，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\geqq f(x)$$

よって，題意の面積 S は

$$\begin{aligned}
S&=\int_a^b\left\{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)-f(x)\right\}dx\\
&=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\int_a^b(x-a)\,dx+f(a)\int_a^b dx-\int_a^b f(x)\,dx\\
&=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left[\frac{1}{2}(x-a)^2\right]_a^b+f(a)(b-a)-\int_a^b f(x)\,dx\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(b-a)^2+f(a)(b-a)-\int_a^b f(x)\,dx\\
&=\frac{1}{2}(b-a)\{f(b)-f(a)\}+f(a)(b-a)-\int_a^b f(x)\,dx\\
&=\frac{1}{2}(b-a)\{f(b)-f(a)+2f(a)\}-\int_a^b f(x)\,dx\\
&=\frac{1}{2}(b-a)\{f(a)+f(b)\}-\int_a^b f(x)\,dx \quad \cdots ①
\end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (x-a)(b-x)f''(x)\,dx\\
&=\int_a^b (x-a)(b-x)\{f'(x)\}'\,dx\\
&=\Big[(x-a)(b-x)\{f'(x)\}\Big]_a^b-\int_a^b\{-x^2+(a+b)x-ab\}'f'(x)\,dx\\
&=-\int_a^b(-2x+a+b)f'(x)\,dx\\
&=-\left\{\Big[(-2x+a+b)f(x)\Big]_a^b-\int_a^b -2f(x)\,dx\right\}\\
&=\Big[(2x-a-b)f(x)\Big]_a^b-2\int_a^b f(x)\,dx\\
&=(b-a)f(b)-(a-b)f(a)-2\int_a^b f(x)\,dx\\
&=(b-a)\{f(b)+f(a)\}-2\int_a^b f(x)\,dx
\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\frac{1}{2}\int_a^b(x-a)(b-x)f''(x)\,dx=\frac{1}{2}(b-a)\{f(a)+f(b)\}-\int_a^b f(x)\,dx \quad \cdots ②$$

①，② より，$S=\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)f''(x)\,dx$ が成り立つ。

【総括】

本問が証明形式の問いであることから

$$S$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2}(b-a)\{f(a)+f(b)\}-\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\uparrow$$

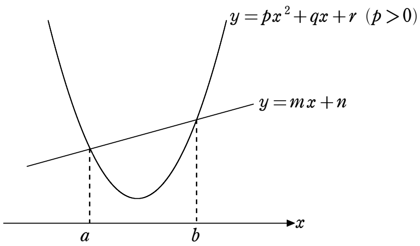
$$\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)f''(x)\,dx$$

という形で結びつける方向性にスムーズにいければ問題ありませんが，
① が得られてそこからどうしようか途方に暮れる人も一定数いると思います。

下手をすると，直線 ℓ の式が

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

と割とゴツ目の形をしていることや，



と，$f(x)$ が 2 次関数という特殊な場合，

$$\begin{aligned} S&=\int_a^b\{mx+n-(px^2+qx+r)\}\,dx\\ &=\int_a^b -p(x-a)(x-b)\,dx \end{aligned}$$

$y=mx+n$，$y=px^2+qx+r$
の交点を出すために連立して
y を消去して得られる
$mx+n-(px^2+qx+r)=0$
は，x^2 の係数が $-p$ で $x=a$，b
を解にもつ 2 次方程式であるため，
左辺は
$$-p(x-a)(x-b)$$
と変形できる

というように，工夫の余地があるため，尚更

「何か上手い方法があるのか？」

と，疑心暗鬼になりかねません。