鋭角三角形 ABC の各頂点 A，B，C から対辺に下ろした垂線の足をそれぞれ P，Q，R とするとき，3 点 A，B，C は △PQR の傍心であることを証明せよ。

＜ ’99 和歌山大 改 ＞

【戦略】

3 頂点の対等性から

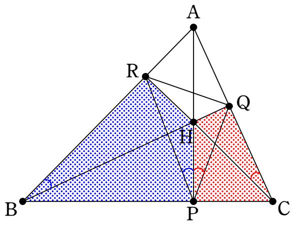
点 A が △PQR の傍心 (の一つ)

であることを示せば，点 B，C も同様の要領で証明できます。

すると，目指すべきは

$$\left\{\begin{array}{l}\angle P\ (\text{内角})\text{ の二等分線}\\ \angle Q\ (\text{外角})\text{ の二等分線}\\ \angle R\ (\text{外角})\text{ の二等分線}\end{array}\right. \quad \textbf{の交点が点 A}$$

ということです。



ひとまず示すべきは ∠RPH＝ ∠HPQ **ということなのですが**

四角形 BPHR，CQHP がそれぞれ同一円周上にあることを看破すると

∠RBH＝ ∠HCQ

であることが言えればいいことが分かります。

ただ，

△ABQ **に注目すれば** ∠RBH＝ $90° - A$

△ACR **に注目すれば** ∠HCQ＝$90° - A$

ということになりますから，解決です。

これにより，PA が $\angle P$ (内角) **の二等分線となっていることが分かります。**

同様に QB が $\angle Q$ (内角) **の 二等分線，RC が** $\angle R$ (内角) **の二等分線ということも分かります。(実際の解答は「同様にして」と片づけて十分でしょう。)**

残る点 A が $\left\{\begin{array}{l}\angle Q\ (\text{外角})\text{ の二等分線}\\ \angle R\ (\text{外角})\text{ の二等分線}\end{array}\right.$ **であることを示す部分は，手なりに片付きます。**

【解答】

$\angle A = \alpha$，$\angle B = \beta$，$\angle C = \gamma$ とする。

また，△ABC の垂心を H とする。

四角形 BPHR において

∠BPH＋∠BRH＝180°

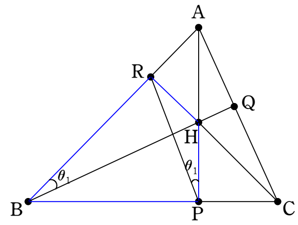
ゆえに，

B，P，H，R は同一円周上

円周角の定理から

∠RBH＝∠RPH ($=\theta_1$ とする)

((図 1) 参照)



(図 1)

一方，四角形 CQHP において

∠CQH＋∠CPH＝180°

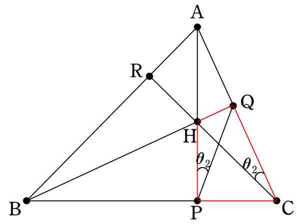
ゆえに

C，Q，H，P は同一円周上

円周角の定理から

∠HPQ＝∠HCQ ($=\theta_2$ とする)

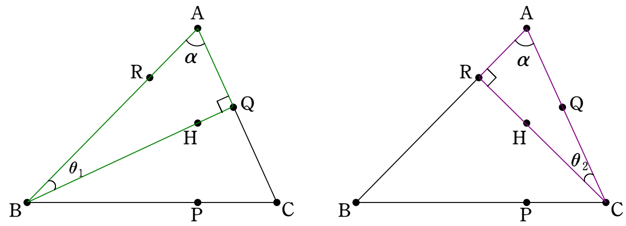
((図 2) 参照)



(図 2)

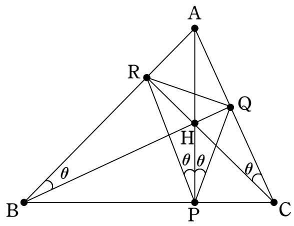
また，直角三角形 ABQ，ACR に注目すると，

$\theta_1 + \alpha = 90°$，$\theta_2 + \alpha = 90°$



(図 3)

したがって，$\theta_1 = \theta_2$ ($=\theta$ とおく) であり，



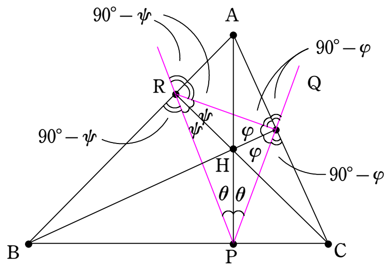
(図 4)

(図 4) より，PA は △PQR の内角 $\angle P$ の二等分線である。

同様にして，

QB は △PQR の内角 $\angle Q$ の二等分線

RC は △PQR の内角 $\angle R$ の二等分線



(図 5)

ゆえに，(図 5) のように△PQR において

$$\left\{\begin{array}{l}\angle P\ \text{(内角) の二等分線} \\ \angle Q\ \text{(外角) の二等分線} \\ \angle R\ \text{(外角) の二等分線}\end{array}\right.$$

の交点が点 A となっている

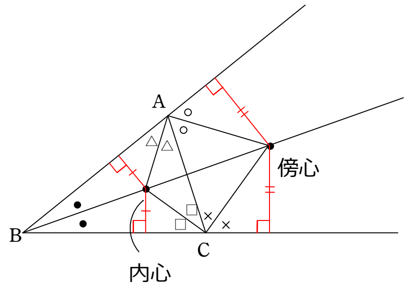
つまり，点 A は △PQR の傍心である。

同様にして，点 B，C も △PQR の傍心であることが分かる。

【総括】

問題の主張は分かりやすく面白い主張です。

恐らく三角形の五心 $\left\{\begin{array}{l}\text{重心} \\ \text{外心} \\ \text{内心} \\ \text{垂心} \\ \text{傍心}\end{array}\right.$ の中でも，傍心は影の薄い存在かもしれませんが



内角の二等分線上にあるという点で，内心と同様に

2 直線までの距離が等しい

など，意外と侮ることなかれという性質ももっています。