k と n を自然数とする。1^k，2^k，…，n^k の相加平均を $M(n,k)$ と書くとき，次を証明せよ。

$$\frac{1}{2n} \leqq \frac{M(n,k)}{n^k} - \frac{1}{k+1} \leqq \frac{1}{n}$$

＜ ’90 お茶の水女子大 ＞

【戦略】

$M(n,k)$ **という見慣れない記号が登場しますが，実際には**

$$M(n,k) = \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n}$$

のことに過ぎません。

$\dfrac{M(n,k)}{n^k}$ **を書き下すと，**

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1^k}{n^k} + \frac{2^k}{n^k} + \cdots + \frac{n^k}{n^k}\right)$$

と区分求積法，並びにそれにまつわる面積の総和を彷彿とさせる式が登場します。

「求められない $\sum$ は面積評価」

という格言からインスピレーションしてもいいですね。

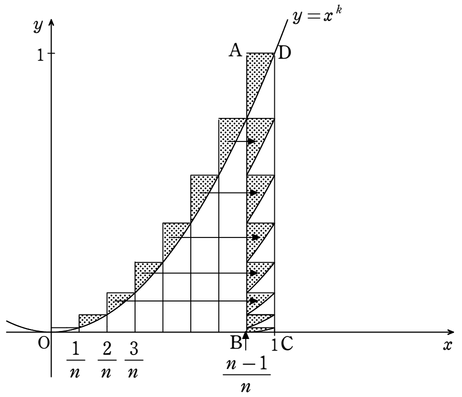
いずれにせよ， $y=x^k$ $(x \geqq 0)$ **のグラフを考えて，面積評価していきましょう。**

ここまで来ると，示すべき不等式に現れる $\dfrac{1}{k+1}$ **というものが** $\displaystyle\int_0^1 x^k\,dx$ **であることは明白でしょう。**

【解答】

$$\frac{M(n,k)}{n^k} = \frac{1}{n^k} \cdot \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n}$$
$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1^k}{n^k} + \frac{2^k}{n^k} + \cdots + \frac{n^k}{n^k}\right) \ (=S \text{ とおく})$$

$k=1, 2, \cdots$ として，$y=x^k$ を考えると，$x \geqq 0$ でこの関数は下に凸の単調増加である。



(図 1)

S は (図 1) の長方形の面積の総和である。

また，図の打点部の総和 T は $T = S - \displaystyle\int_0^1 x^k\,dx = S - \frac{1}{k+1}$

この打点部を各々 (図 1) のように長方形 ABCD の中に組み込むと

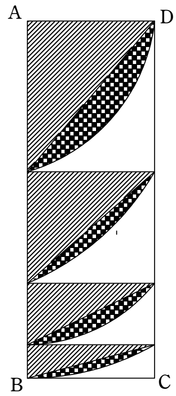
$T \leqq$ (長方形 ABCD の面積)

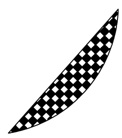
なので，

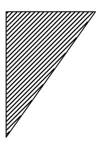
$$S - \frac{1}{k+1} \leqq \frac{1}{n} \cdots ①$$

次に $y=x^k$ のグラフは $x \geqq 0$ の範囲で下に凸であるから，

右図のように



T は  の部分だけ

 部分の和，

すなわち長方形 ABCD の面積の半分より大きい。

つまり，$\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{n} \leqq T$ であり，$\dfrac{1}{2n} \leqq S - \dfrac{1}{k+1} \cdots ②$

①，② から $\dfrac{1}{2n} \leqq S - \dfrac{1}{k+1} \leqq \dfrac{1}{n}$，すなわち

$$\frac{1}{2n} \leqq \frac{M(n,k)}{n^k} - \frac{1}{k+1} \leqq \frac{1}{n}$$

が成立することが示された。

【総括】

相加平均を見慣れない記号で書かれただけで平常心を失ってしまうことだけは避けたいですね。

一度書き下せば，セオリー通り面積評価の形になりましたから，$y=x^k$ のグラフを用いて題意の不等式を証明することになります。

とは言え，はみ出ている部分を長方形に組み込む発想は中々ハードかもしれません。

今後の糧にできればよしとする類の問題であり，初見で試験場で出会った場合は撤退も致し方ないでしょう。