長さ一定の放物線の弦の中点【類題】

2点 P，Q が放物線 $y=x^2$ の上を，$\mathrm{PQ}=\ell$（ℓ は定数）を満たしながら動く。また，線分 PQ の中点を $\mathrm{A}(a,\ b)$ とする。

⑴　b を a の関数で表せ。

⑵　b の最小値とそのときの a の値を求めよ。

＜ '89 関西学院大 ＞

【戦略】

⑴ $\begin{cases} a=\dfrac{p+q}{2} \\ b=\dfrac{p^2+q^2}{2} \end{cases}$ **，すなわち**

$$\begin{cases} p+q=2a \\ p^2+q^2=2b \end{cases}$$

という対称式による関係式が手元にあるわけです。

もちろん pq **を Get したくなるはずですから**

$$(p+q)^2-2pq=2b$$

として，$pq=2a^2-b$ **を得ます。**

後は，

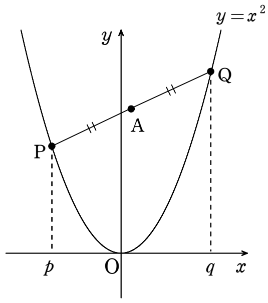
$$\begin{aligned} \ell^2&=\mathrm{PQ}^2 \\ &=(q-p)^2+(q^2-p^2)^2 \\ &=(q-p)^2+\{(q+p)(q-p)\}^2 \\ &=(q-p)^2\{1+(q+p)^2\} \\ &=\{(q+p)^2-4pq\}\{1+(q+p)^2\} \end{aligned}$$

と手なりに捌いていけばよいでしょう。

⑵　**例題と同様です。**

【解答】

⑴



$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とし，$p<q$ として考えても一般性を失わない。

$\mathrm{A}\left(\dfrac{p+q}{2},\ \dfrac{p^2+q^2}{2}\right)$ であるため，$\begin{cases} \dfrac{p+q}{2}=a \\ \dfrac{p^2+q^2}{2}=b \end{cases}$

これより，$\begin{cases} p+q=2a & \cdots ① \\ p^2+q^2=2b & \cdots ② \end{cases}$

② より，$(p+q)^2-2pq=2b$ で，$4a^2-2pq=2b$，すなわち

$$pq=2a^2-b \quad \cdots ③$$

$$\begin{aligned} \ell^2&=\mathrm{PQ}^2 \\ &=(q-p)^2+(q^2-p^2)^2 \\ &=(q-p)^2+\{(q+p)(q-p)\}^2 \\ &=(q-p)^2\{1+(q+p)^2\} \\ &=\{(q+p)^2-4pq\}\{1+(q+p)^2\} \end{aligned}$$

①，③ より

$$\begin{aligned} \ell^2&=\{4a^2-4(2a^2-b)\}(1+4a^2) \\ &=4(b-a^2)(1+4a^2) \end{aligned}$$

これより，$b-a^2=\dfrac{\ell^2}{4(4a^2+1)}$，すなわち

$$b=a^2+\frac{\ell^2}{4(4a^2+1)} \quad \cdots 答$$

⑵　線分 PQ の傾き $p+q$（$=2a$）は全ての実数をとり得る。

ゆえに，a は全ての実数値を取り得る

$a^2=t$ $(t\geqq 0)$ とおくと，$b=t+\dfrac{\ell^2}{4(4t+1)}$

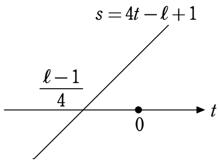
$f(t)=t+\dfrac{\ell^2}{4(4t+1)}$ $(t\geqq 0)$ とおく。

$$\begin{aligned} f'(t)&=1-\frac{\ell^2}{(4t+1)^2} \\ &=\frac{(4t+1+\ell)(4t+1-\ell)}{(1+t)^2} \end{aligned}$$

$\ell>0$，$t\geqq 0$ の下で，$f'(t)$ の符号は $4t-\ell+1$ の符号に依存することに注意する。

[1] $\dfrac{\ell-1}{4} \leqq 0$，すなわち $0<\ell\leqq 1$ のとき

$t \geqq 0$ の範囲で $f'(t)>0$



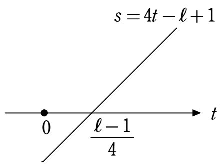
よって，$t\geqq 0$ の範囲で
$f(t)$ は単調増加である。

$f(t) \geqq f(0)=\dfrac{1}{4}\ell^2$

したがって，b の最小値は $\dfrac{1}{4}\ell^2$

[2] $\dfrac{\ell-1}{4}>0$，すなわち $\ell>1$ のとき

t	0	$\cdots$	$\frac{\ell-1}{4}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$



よって，
$$
\begin{aligned}
f(t) &\geqq f\left(\frac{\ell-1}{4}\right)\\
&=\frac{\ell-1}{4}+\frac{\ell^2}{4\left\{4\cdot\frac{\ell-1}{4}+1\right\}}\\
&=\frac{\ell-1}{4}+\frac{\ell^2}{4\ell}\\
&=\frac{1}{2}\ell-\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

したがって，h の最小値は $\dfrac{1}{2}\ell-\dfrac{1}{4}$

以上 [1], [2] から，b の最小値は $\begin{cases} 0<\ell\leqq 1 \text{ のとき } \dfrac{1}{4}\ell^2 \\ \ell>1 \text{ のとき } \dfrac{1}{2}\ell-\dfrac{1}{4} \end{cases}$ …答

【総括】

(2) では，$b=a^2+\dfrac{\ell^2}{4(4a^2+1)}$ において，

$4a^2+1$ が鬱陶しい

と思えば，$x=4a^2+1$ $(x\geqq 1)$ とおくと，$a^2=\dfrac{x-1}{4}$ ですから

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{x-1}{4}+\frac{\ell^2}{4x}\\
&=\frac{1}{4}\left(x+\frac{\ell^2}{x}-1\right)
\end{aligned}
$$

と，わずかではありますが，目に優しくなります。