放物線 $y=x^2$ 上に 2 点 P，Q がある。線分 PQ の中点の y 座標を h とする。
(1) 線分 PQ の長さ L と傾き m で，h を表せ。
(2) L を固定したとき，h がとりうる値の最小値を求めよ。

＜ '08 東京大 ＞

【戦略 1】

(1) **ひとまず，$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ $(p<q)$ と設定し，**

$$\textbf{線分 PQ の}\begin{cases}\textbf{長さ } L\\ \textbf{傾き } m\end{cases}$$

について立式していきます。

傾き m については $m=\dfrac{q^2-p^2}{q-p}=q+p$ と，すぐに捌けます。

長さ L についても

$$\begin{aligned}L^2&=(q-p)^2+(q^2-p^2)^2\\&=(q-p)^2+\{(q+p)(q-p)\}^2\\&=(q-p)^2\{1+(q+p)^2\}\end{aligned}$$

と捌けますし，手元に和の $q+p$ があることを考えると

$$\begin{aligned}L^2&=\{(q+p)^2-4pq\}\{1+(q+p)^2\}\\&=(m^2-4pq)(1+m^2)\end{aligned}$$

とすることで，$pq=\dfrac{1}{4}\left\{m^2-\dfrac{L^2}{1+m^2}\right\}$ と積も得られます。

今回のターゲット h は $h=\dfrac{p^2+q^2}{2}$ であり，手元に $p+q$，pq の情報があることを考えると，定番の対称式の処理で捌けるでしょう。

(2) **(1) で得られる $h=\dfrac{1}{4}\left(m^2+\dfrac{L^2}{1+m^2}\right)$ について，m を変数と見たときの h の最小値を求めるという問題です。**

m は m^2 として変化するわけなので，$m^2=t$ $(t\geqq 0)$ などと置き換えれば

$$h=\frac{1}{4}\left(t+\frac{L^2}{1+t}\right)$$

となり，あとは $f(t)=t+\dfrac{L^2}{1+t}$ $(t\geqq 0)$ などとして微分すればよいでしょう。

【解 1】

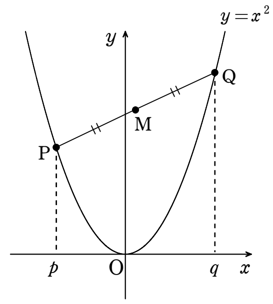
(1) $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とし，線分 PQ の中点を M とする。

$p<q$ として考えても一般性を失わない。

$\mathrm{M}\left(\dfrac{p+q}{2},\ \dfrac{p^2+q^2}{2}\right)$ であるため，

$$h=\frac{p^2+q^2}{2}\ \cdots(*)$$

線分 PQ の傾きが m なので



$$\frac{q^2-p^2}{q-p}=m$$

これより，$p+q=m$ …① を得る。

一方，

$$\begin{aligned}L^2&=\mathrm{PQ}^2\\&=(q-p)^2+(q^2-p^2)^2\\&=(q-p)^2+\{(q+p)(q-p)\}^2\\&=(q-p)^2\{1+(q+p)^2\}\\&=\{(q+p)^2-4pq\}\{1+(q+p)^2\}\\&=(m^2-4pq)(1+m^2)\end{aligned}$$

これより，$m^2-4pq=\dfrac{L^2}{1+m^2}$

$$\therefore\ \ pq=\frac{1}{4}\left\{m^2-\frac{L^2}{1+m^2}\right\}\ \cdots ②$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}p^2+q^2&=(p+q)^2-2pq\\&=m^2-\frac{1}{2}\left\{m^2-\frac{L^2}{1+m^2}\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(m^2+\frac{L^2}{1+m^2}\right)\end{aligned}$$

これを $(*)$ に代入すれば，$h=\dfrac{1}{4}\left(m^2+\dfrac{L^2}{1+m^2}\right)$ … 答

(2) 線分 PQ の傾き m は全ての実数をとり得る。

$m^2=t$ $(t\geqq 0)$ とおくと，$h=\dfrac{1}{4}\left(t+\dfrac{L^2}{1+t}\right)$

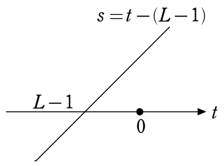
$f(t)=t+\dfrac{L^2}{1+t}$ $(t\geqq 0)$ とおく。

$$\begin{aligned}f'(t)&=1-\frac{L^2}{(1+t)^2}\\&=\frac{(1+t+L)(1+t-L)}{(1+t)^2}\\&=\frac{(t+L+1)\{t-(L-1)\}}{(1+t)^2}\end{aligned}$$

$L>0$，$t\geqq 0$ の下で，$f'(t)$ の符号は $t-(L-1)$ の符号に依存することに注意する。

[1] $L-1 \leqq 0$，すなわち $0<L \leqq 1$ のとき

$t \geqq 0$ の範囲で $f'(t)>0$



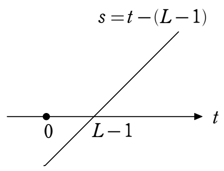
よって，$t \geqq 0$ の範囲で
$f(t)$ は単調増加である。

$f(t) \geqq f(0)=L^2$

したがって，h の最小値は $\dfrac{1}{4}L^2$

[2] $L-1>0$，すなわち $L>1$ のとき

t	0	$\cdots$	$L-1$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘		↗



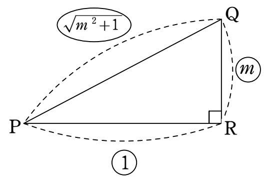
よって，$f(t) \geqq f(L-1)=2L-1$

したがって，h の最小値は $\dfrac{1}{4}(2L-1)$

以上 [1], [2] から，h の最小値は $\begin{cases} 0<L \leqq 1 \text{ のとき } \dfrac{1}{4}L^2 \\ L>1 \text{ のとき } \dfrac{1}{4}(2L-1) \end{cases}$ …答

【戦略 2】 PQ の長さ L についての処理

PQ の傾きが m なので
右の図のように



PR : RQ : PQ $=1 : m : \sqrt{m^2+1}$

となりますから

$$\begin{aligned} \mathrm{PQ} &= \sqrt{m^2+1}\ \mathrm{PR} \\ &= \sqrt{m^2+1}\,(q-p) \end{aligned}$$

とすることで，$L=\sqrt{m^2+1}\,(q-p)$ とする処理もよくやります。

これにより，$q-p=\dfrac{L}{\sqrt{m^2+1}}$ を得ます。

【解 1】から分かるように，$q+p=m$ という傾きに関する式もあります。

ここまでくると，対称式に拘らず，$\begin{cases} q+p=m \\ q-p=\dfrac{L}{\sqrt{m^2+1}} \end{cases}$ という連立方程式を解いてしまってもよいでしょう。

$$p=\frac{1}{2}\left(m-\frac{L}{\sqrt{m^2+1}}\right),\quad q=\frac{1}{2}\left(m+\frac{L}{\sqrt{m^2+1}}\right)$$

と得られます。

【解 2】 L についての部分的処理

$\mathrm{PQ}=\sqrt{m^2+1}\,(q-p)$ で，$\mathrm{PQ}=L$ であることから

$$\sqrt{m^2+1}\,(q-p)=L$$

これより，$q-p=\dfrac{L}{\sqrt{m^2+1}}$

$$\begin{cases} q+p=m \\ q-p=\dfrac{L}{\sqrt{m^2+1}} \end{cases}$$

これら 2 式から，$p=\dfrac{1}{2}\left(m-\dfrac{L}{\sqrt{m^2+1}}\right)$，$q=\dfrac{1}{2}\left(m+\dfrac{L}{\sqrt{m^2+1}}\right)$

$$\begin{aligned} p^2+q^2 &= (p+q)^2-2pq \\ &= m^2-2\cdot\frac{1}{4}\left(m^2-\frac{L^2}{m^2+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(m^2+\frac{L^2}{1+m^2}\right) \end{aligned}$$

ゆえに，$h=\dfrac{1}{4}\left(m^2+\dfrac{L^2}{1+m^2}\right)$ …答

【総括】

ゴリゴリ計算していくうちに対称式の路線が匂ってくる人もいれば，

線分 PQ の長さ L，傾き m，中点の座標はすべて

P，Q の立場を入れ替えても変わらない

ということを最初から看破し，

「p，q に関する対称式で表せるはず」

と睨めている人もいるでしょう。

これについては正解者の中でも分かれると思いますが，東大受験生であれば最初から看破していてほしいところです。

なお，h の形から相加平均・相乗平均の関係をインスピレーションし，

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{4}\left(t+\frac{L^2}{1+t}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left\{(1+t)+\frac{L^2}{1+t}-1\right\} \\ &\geqq \frac{1}{4}\left\{2\sqrt{(1+t)\cdot\frac{L^2}{1+t}}-1\right\} \\ &= \frac{1}{4}(2L-1) \end{aligned}$$

と安易にしてしまうのはいただけません。

不等式から最小値を考えるときは必ず等号成立について言及しなければなりません。

そう考えると，上の等号成立は $1+t=\dfrac{L^2}{1+t}$ で，$(1+t)^2=L^2$

$$(1+t+L)(1+t-L)=0$$

のときです。

$t\geqq 0$，$L>0$ の下で，$1+t+L>0$ ですから，等号成立は $t=L-1$ のときということになりますが，L が $0<L<1$ のときだと等号成立のときの t が負ということになってしまいます。

つまり，$0<L<1$ のときは上の等号が成り立たないため，上記不等式から最小値を求めることができないということになります。

なお，ほぼ同じ問題が 1974 年度にも出題されています。

> 長さ ℓ の線分が，その両端を放物線 $y=x^2$ の上にのせて動く。この線分の中点 M が x 軸に最も近い場合の M の座標を求めよ。
> ただし，$\ell\geqq 1$ とする。
>
> ＜ ’74 東京大 ＞

この場合，$\ell\geqq 1$ としてくれている分，微分した際の場合分けがなくなりますし，相加平均・相乗平均の関係の関係で仕留めることも可能であるため，文系での出題も可能です。

解答自体は L を ℓ とすればほぼ同じで，【解 1】の [2] の場合のみを考えればよく，

$t=\ell-1$ で最小

すなわち，$m^2=\ell-1$ のときに最小となります。

このとき，$m=\pm\sqrt{\ell-1}$ であり，$p+q=\pm\sqrt{\ell-1}$

求める M の座標は $\left(\dfrac{p+q}{2},\ \dfrac{1}{4}f(t)\right)$ であるため，

$$\mathrm{M}\left(\pm\frac{\sqrt{\ell-1}}{2},\ \frac{1}{4}(2\ell-1)\right)$$

が求めるものです。

ただしコチラの場合，傾き m についての設定は与えられていないため，解答記述においては多少の紆余曲折があるかもしれません。