関数

$$f(x)=\frac{x^2+ax+b}{px^2+qx+r}$$

が次の条件を満たすように定数 a，b，p，q，r の値を定めよ。

（ｉ）$f(1)=0$

（ⅱ）$f'(0)=\frac{5}{8}$

（ⅲ）$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{1}{2}$

（ⅳ）$\lim_{x\to -1} |f(x)|=\infty$

（ｖ）$\lim_{x\to 2} |f(x)|=\infty$

＜ ’59 京都大 ＞

【戦略】

条件（ｉ）から条件（ｖ）を素直に立式していけばよいでしょう。

条件（ｉ）は代入

条件（ⅱ）は $f'(x)$ の計算後代入

条件（ⅲ）は $f(x)=\dfrac{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}{p+\frac{q}{x}+\frac{r}{x^2}}$ **というように，**

「最強次数に注目する」

という $\frac{\infty}{\infty}$ タイプの不定形解消

と，ここまでは手なりに進むでしょう。

条件（ⅳ）は分子が有限確定値に収束するため，$|f(x)|$ が ∞ に発散するのであれば

$$\begin{cases}\lim_{x\to -1}(f(x)\text{の分母})=0\\ \lim_{x\to -1}(f(x)\text{の分子})\fallingdotseq 0\end{cases}$$

と翻訳すればよいでしょう。

同様に，条件（ｖ）は $\begin{cases}\lim_{x\to 2}(f(x)\text{の分母})=0\\ \lim_{x\to 2}(f(x)\text{の分子})\fallingdotseq 0\end{cases}$ **と翻訳します。**

【解答】

条件（ｉ）の $f(1)=0$ より，$\frac{1+a+b}{p+q+r}=0$，すなわち

$$\begin{cases}1+a+b=0 & \cdots ①\\ p+q+r\fallingdotseq 0 & \cdots ②\end{cases}$$

また，

$$f'(x)=\frac{(2x+a)(px^2+qx+r)-(x^2+ax+b)(2px+q)}{(px^2+qx+r)^2}$$

条件（ⅱ）の $f'(0)=\frac{5}{8}$ より，$\frac{ar-bq}{r^2}=\frac{5}{8}$ $\cdots ③$

また，十分大きな x に対して，$f(x)=\dfrac{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}{p+\frac{q}{x}+\frac{r}{x^2}}$ であるから

条件（ⅲ）の $\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{1}{2}$ より，$\frac{1}{p}=\frac{1}{2}$ $\cdots ④$

また，$\lim_{x\to -1}(f(x)\text{の分子})=-a+b+1$（＝有限確定値）であるため，

条件（ⅳ）から，$\begin{cases}\lim_{x\to -1}(f(x)\text{の分母})=0 & \cdots ⑤\\ -a+b+1\fallingdotseq 0 & \cdots ⑥\end{cases}$ となる必要がある。

同様に条件（ｖ）から $\begin{cases}\lim_{x\to 2}(f(x)\text{の分母})=0 & \cdots ⑦\\ 2a+b+4\fallingdotseq 0 & \cdots ⑧\end{cases}$ となる必要がある。

したがって，$p-q+r=0$ $\cdots ⑨$，$4p+2q+r=0$ $\cdots ⑩$

④ より，$p=2$

このとき，⑨，⑩ から $\begin{cases}2-q+r=0\\ 8+2p+r=0\end{cases}$ であり，これら２式から

$$q=-2,\ r=-4$$

これら，q，r の値を ③ に代入すると

$$\frac{-4a+2b}{16}=\frac{5}{8}$$

整理すると，$-2a+b=5$ $\cdots ⑪$

①，⑪ を連立して a，b を求めると，$a=-2$，$b=1$

まとめると，a，b，p，q，r の値の組は

$$(a,\ b,\ p,\ q,\ r)=(-2,\ 1,\ 2,\ -2,\ -4)$$

であり，これらは ②，⑥，⑧ も満たす。

以上から，求める a，b，p，q，r の値の組は

$$(a,\ b,\ p,\ q,\ r)=(-2,\ 1,\ 2,\ -2,\ -4)\ \cdots 答$$

【総括】

a，b，p，q，r という 5 文字ありますが，条件は 5 つありますのでそこまで恐れる必要はありません。

分数形の関数の有限確定条件は経験が多いと思いますが，本問のような「発散条件」についてはあまり経験がない受験生が多いと思われます。

特に，解答中の ②，⑥，⑧ のチェックが漏れると傷になります。

このあたりを不備なく立式できると，注意力が備わっている証拠となるでしょう。