

極限の有限確定条件【タイプ2】

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 2, \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 3$$

となるような、次数の最も低い多項式  $f(x)$  を求めよ。

< '60 千葉大 >

【戦略】

分母が 0 に収束するため、題意の極限たちが有限確定値に収束するためには、分子も 0 に収束する必要があります。

すなわち、 $f(1)=f(2)=f(3)=0$  となる必要があります。

すると因数定理により

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)g(x) \quad (g(x) \text{ は多項式})$$

と表せます。

これより

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2g(1), \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = -g(2), \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 2g(3)$$

であるため、条件と照らし合わせると

$$\begin{cases} 2g(1)=1 \\ -g(2)=2 \\ 2g(3)=3 \end{cases} \quad \text{すなわち,} \quad \begin{cases} g(1)=\frac{1}{2} \\ g(2)=-2 \\ g(3)=\frac{3}{2} \end{cases}$$

を得ます。

これは、 $y=g(x)$  は  $(1, \frac{1}{2}), (2, -2), (3, \frac{3}{2})$  を通ることを意味するわけですが、これら 3 点は同一直線上にないため、 $g(x)$  は最低でも 2 次以上ということになります。

あとは、出来る限り次数の低い方から調べていくこととなりますので

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

などとおき、ゴリゴリ調べていけば解決です。

【解答】

条件より、 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$ 、すなわち

$$f(1) = f(2) = f(3) = 0$$

となる必要がある。

$f(x)$  は多項式ゆえ、因数定理から  $(x-1)(x-2)(x-3)$  を因数にもつ

よって  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)g(x)$  ( $g(x)$  は多項式) と表せる。

$$\frac{f(x)}{x-1} = (x-2)(x-3)g(x) \text{ より, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2g(1)$$

$$\frac{f(x)}{x-2} = (x-1)(x-3)g(x) \text{ より, } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = -g(2)$$

$$\frac{f(x)}{x-3} = (x-1)(x-2)g(x) \text{ より, } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 2g(3)$$

$$\text{よって, 条件より, } \begin{cases} 2g(1)=1 \\ -g(2)=2 \\ 2g(3)=3 \end{cases} \quad \text{すなわち, } \begin{cases} g(1)=\frac{1}{2} \\ g(2)=-2 \quad \dots (*) \\ g(3)=\frac{3}{2} \end{cases}$$

ゆえに、 $y=g(x)$  は  $(1, \frac{1}{2}), (2, -2), (3, \frac{3}{2})$  を通る。

これら 3 点は同一直線上にはないため、 $g(x)$  は最低でも 2 次以上。

$$g(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \text{ とすると, } (*) \text{ から } \begin{cases} a+b+c = \frac{1}{2} \\ 4a+2b+c = -2 \\ 9a+3b+c = \frac{3}{2} \end{cases}$$

これら 3 式より、 $a=3, b=-\frac{23}{2}, c=9$  (これは  $a \neq 0$  を満たす)

よって、求める次数の最も低い  $f(x)$  は

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\left(3x^2 - \frac{23}{2}x + 9\right) \dots \text{ 答}$$

【総括】

例題のタイプは経験が多いと思いますが、このタイプは未経験という人も多いと思います。

ただ、前半の有限確定条件の翻訳こそ経験がモノをいいますが、それ以降については無理のない基礎学力があれば捌くことができる範疇です。