$\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{a+\cos x}-b}{(x-\pi)^2}=\frac{1}{4}$ となるように定数 a，b を定めよ。

＜ '86 お茶の水女子大 ＞

【戦略 1】

ひとまずは，$x\to\pi$ という極限ではなく，☆ $\to 0$ という極限の形にするために
$x-\pi=t$ などと置きなおし，

$$\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{a-\cos t}-b}{t^2}=\frac{1}{4}$$

が成り立つように a，b を仕組む

と言い換えます。

分母が 0 に収束するため，$\dfrac{1}{0}$ などといったように，分子が 0 以外の値となってしまったら，発散してしまいます。

したがって，ひとまずは分子も 0 に収束する必要があります。

このことから，$\displaystyle\lim_{t\to0}\{\sqrt{a-\cos t}-b\}=0$ となる必要があり，ここから $\sqrt{a-1}-b=0$，すなわち $b=\sqrt{a-1}$ という関係式を得ます。

ただ，今の段階では

$$\frac{\sqrt{a-\cos t}-b}{t^2}=\frac{\sqrt{a-\cos t}-\sqrt{a-1}}{t^2}\to\frac{0}{0}\ (\textbf{不定形})$$

であり，収束するのか発散するのかは確定ではありません。

きちんとこの不定形が有限確定値に収束することを目指して，不定形の解消をしていきます。

この不定形の解消法の第一感としては，

分子の有理化

でしょう。

すると，

$$\frac{\sqrt{a-\cos t}-\sqrt{a-1}}{t^2}=\frac{1-\cos t}{t^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a-\cos t}+\sqrt{a-1}}$$

となり，$\dfrac{0}{0}$ という不定形の根元が $\dfrac{1-\cos t}{t^2}$ であることが分かります。

この不定形の解消は

$$\begin{cases}\textbf{方法 I}：1-\cos t\ \textbf{に対して 分母分子に}\ 1+\cos t\ \textbf{をかける}\\ \textbf{方法 II}：1-\cos t\ \textbf{という形から半角公式をインスピレーションする}\end{cases}$$

という 2 路線あります。

これについてはどちらで捌いても構わないでしょう。
（**【解 1】では 方法 I で捌いていきます。**）

【解 1】

$x-\pi=t$ とおくと，$\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{a+\cos(t+\pi)}-b}{t^2}=\frac{1}{4}$

すなわち，

$$\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{a-\cos t}-b}{t^2}=\frac{1}{4}\quad\cdots(*)$$

となるように定数 a，b を定めればよい。

$t\to0$ のとき，(分母) $\to0$ であるから，左辺の極限が有限確定値に収束するためには (分子) $\to0$，すなわち

$$\lim_{t\to0}\{\sqrt{a-\cos t}-b\}=0$$

が成り立つ必要がある。

よって，$\sqrt{a-1}-b=0$，すなわち

$$b=\sqrt{a-1}\quad\cdots①$$

が成り立つことが必要である。

このとき

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{a-\cos t}-b}{t^2}&=\frac{\sqrt{a-\cos t}-\sqrt{a-1}}{t^2}\\&=\frac{1}{t^2}\cdot\frac{(a-\cos t)-(a-1)}{\sqrt{a-\cos t}+\sqrt{a-1}}\\&=\frac{1-\cos t}{t^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a-\cos t}+\sqrt{a-1}}\\&=\frac{1-\cos^2 t}{t^2(1+\cos t)}\cdot\frac{1}{\sqrt{a-\cos t}+\sqrt{a-1}}\\&=\frac{\sin^2 t}{t^2}\cdot\frac{1}{1+\cos t}\cdot\frac{1}{\sqrt{a-\cos t}+\sqrt{a-1}}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{a-\cos t}-b}{t^2}&=1\cdot\frac{1}{1+\cos0}\cdot\frac{1}{\sqrt{a-\cos0}+\sqrt{a-1}}\\&=\frac{1}{4\sqrt{a-1}}\end{aligned}$$

となり，$\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{a-\cos t}-b}{t^2}$ は有限確定値となる。

$(*)$ より，この有限確定値が $\dfrac{1}{4}$ という値となればよく，

$$\frac{1}{4\sqrt{a-1}}=\frac{1}{4}$$
$$\sqrt{a-1}=1$$
$$a=2$$

① より，$b=1$

以上より，

$$a=2，b=1\quad\cdots\text{答}$$

【戦略 2】① を得る考え方

少々技巧的ですが

$$\lim_{t\to 0}\{\sqrt{a-\cos t}-b\}=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{\sqrt{a-\cos t}-b}{t^2}\cdot t^2\right\}$$

と見ると，明確に $\lim_{t\to 0}\{\sqrt{a-\cos t}-b\}=0$ という必要性が得られます。

【解 2】① を得る部分的別解

$x-\pi=t$ とおくと，$\lim_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{a+\cos(t+\pi)}-b}{t^2}=\dfrac{1}{4}$

すなわち，

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{a-\cos t}-b}{t^2}=\frac{1}{4}\quad\cdots(*)$$

となるように定数 a，b を定めればよい。

$(*)$ が成り立つとき，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\{\sqrt{a-\cos t}-b\}&=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{\sqrt{a-\cos t}-b}{t^2}\cdot t^2\right\}\\&=\frac{1}{4}\cdot 0\\&=0\end{aligned}$$

より，$\sqrt{a-1}-b=0$，すなわち

$$b=\sqrt{a-1}\quad\cdots ①$$

が成り立つことが必要である。

（以下【解 1】と同じ）

【総括】

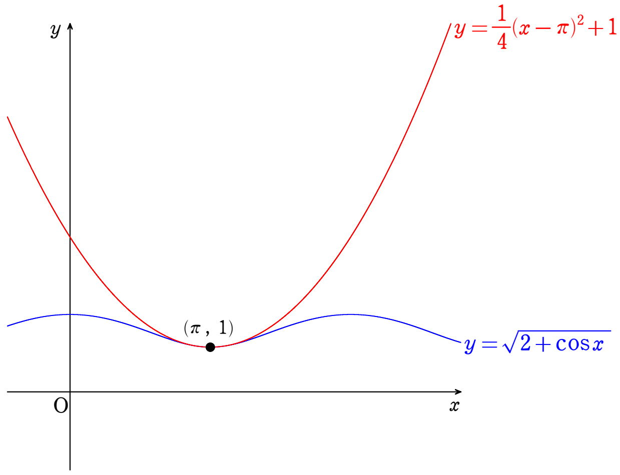
分数形の極限の有限確定条件問題として，典型問題の範疇です。

ひとまず【解 1】の議論が王道的な処理だと思いますし，【解 2】については少々格好つけた「人とは違う俺カッケー」という中二病的解法なので，試験場では普通に【解 1】の路線で問題ありません。

なお，今回得られた結論は

x が π に近いとき，$\sqrt{2+\cos x}\fallingdotseq\dfrac{1}{4}(x-\pi)^2+1$ と近似できる

ということであり，グラフ的には



という概形となります。