

和から一般項

正の数の数列  $\{a_n\}$  の初項から第  $n$  項までの和を  $S_n$  とする。いま、

$$S_n = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

とする。

- (1)  $a_n$  を求めよ。  
 (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ。

< '77 徳島大, '97 室蘭工業大 >

【戦略】

- (1) 和の情報から一般項に辿り着くための関係式

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$  という関係の下で

$$n \geq 2 \text{ のとき } a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$n = 1 \text{ のとき } a_1 = S_1$$

という基本事項の利用を考えます。

大枠としては、 $n \geq 2$  の下で捌いていき、 $n = 1$  のときは個別検証すればよいでしょう。

$n \geq 2$  のとき、 $a_n = S_n - S_{n-1}$  ですから、これを与えられた条件

$$S_n = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right)$$

に代入すると

$$S_n = \frac{1}{2} \left\{ (S_n - S_{n-1}) + \frac{1}{S_n - S_{n-1}} \right\}$$

というように、 $S_n$  と  $S_{n-1}$  の関係式が得られます。

これを整理すると、 $S_n^2 = S_{n-1}^2 + 1$  と、 $\{S_n^2\}$  という数列が等差数列である構造が見て取れるので、ここからは消化試合となります。

- (2)  $a_n$  が具体的に得られており、基本的な極限計算です。

(1) から  $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$  と得られているはずですから、この極限は手なりに

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \end{aligned}$$

と、分子の有理化をして捌く基本中の基本です。

【解答】

- (1)  $n \geq 2$  のとき、 $a_n = S_n - S_{n-1}$  … ①

これを  $S_n = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right)$  に代入すると

$$S_n = \frac{1}{2} \left\{ (S_n - S_{n-1}) + \frac{1}{S_n - S_{n-1}} \right\}$$

$$2S_n = S_n - S_{n-1} + \frac{1}{S_n - S_{n-1}}$$

$$2S_n(S_n - S_{n-1}) = (S_n - S_{n-1})^2 + 1$$

これを展開し、整理すると

$$S_n^2 = S_{n-1}^2 + 1 \quad (n=2, 3, \dots) \dots (*)$$

を得る。

ここで、 $n=1$  のとき、 $S_1 = a_1$  であり、条件から

$$S_1 = \frac{1}{2} \left( a_1 + \frac{1}{a_1} \right)$$

であるため、 $S_1 = \frac{1}{2} \left( S_1 + \frac{1}{S_1} \right) \left( = \frac{S_1^2 + 1}{2S_1} \right)$

ゆえに、 $2S_1^2 = S_1^2 + 1$ 、すなわち  $S_1^2 = 1$  を得る。

数列  $\{a_n\}$  は正の数からなる数列であるため、 $S_n > 0$  … ②

したがって、 $S_1 = a_1 = 1$  … ③

(\*) より、数列  $\{S_n^2\}$  は初項  $S_1^2 = 1$ 、公差 1 の等差数列であるため

$$\begin{aligned} S_n^2 &= 1 + (n-1) \\ &= n \end{aligned}$$

② より、 $S_n = \sqrt{n}$

① に代入し、 $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$  ( $n \geq 2$ ) … (☆)

(☆) に  $n=1$  を代入すると、 $a_1 = \sqrt{1} - \sqrt{0} = 1$

③ を考えると、(☆) は  $n=1$  のときも成立すると言える。

したがって、 $n=1, 2, \dots$  に対して  $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$  … 罫

$$\begin{aligned} (2) \ a_n &= \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \end{aligned}$$

ゆえに、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = 0$  … 罫

【総括】

見た目のシンプルさ，教育的内容，適度な負荷，どれをとってもよくできた問題です。

1960年に当時高校生の鹿野健氏が新作し，雑誌のコンテストで入賞したことで後に様々な大学で出題されるようになったみたいです。