3種類の文字 a，b，c の中から重複を許して5個の文字を選び，横1列に並べてできる文字列をワードと呼ぶ。次の問いに答えよ。

(1) ワードの総数を求めよ。

(2) 文字列 bc を含まないワードの総数，すなわち b の直後に c がこないようなワードの総数を求めよ。

(3) 文字列 ac も bc も含まないワードの総数を求めよ。

＜ '98 名古屋市立大 ＞

【戦略 1】

(1) **1 文字目，2 文字目，…，5 文字目は全てフリーダムに 3 通りの選択肢があるため，$3^5=243$【通り】としておしまいです。**

(2) **b の後に c がこれないというのは鬱陶しいため，**

n **文字のワード**

に一般化して考え，漸化式を作成することを考えます。

n **文字のワードのうち，bc を含まない並べ方を** x_n **通りとします。**

このうち， $\begin{cases} \text{a から始まるものを } a_n \text{ 通り} \\ \text{b から始まるものを } b_n \text{ 通り} \\ \text{c から始まるものを } c_n \text{ 通り} \end{cases}$ **とします。**

ただ，a，c の後ろには何でも置けますが，b の後ろは制限がかかります。

つまり，a，c には対称性があるため，$a_n=c_n$ **として考えてよいわけです。**

1 文字目が a から始まる場合

$\text{a}\overbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}^{n-1\text{個}}$ … **どの文字から始まってもよく，**x_{n-1} **通り**

で，a から始まる n **文字のワードのうち bc を含まないのは** x_{n-1} **通りなので，**$a_n=x_{n-1}$ **を得ます。**

1 文字目が c から始まる場合も同様に $c_n=x_{n-1}$ **を得ますが，これは対称性から** $a_n=x_{n-1}$ **であるため，同じことです。**

1 文字目が b から始まる場合

$\text{b}\ \overbrace{\text{a}\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}^{n-1\text{個}}$ … **a から始まる** $n-1$ **個の並べ方** a_{n-1} **通り**

$\text{b}\ \overbrace{\text{b}\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}^{n-1\text{個}}$ … **b から始まる** $n-1$ **個の並べ方** b_{n-1} **通り**

であり，$b_n=a_{n-1}+b_{n-1}$ **となります。**

ここからは $x_n=a_n+b_n+c_n=2a_n+b_n$ **ですから** $\begin{cases} a_n=x_{n-1} \\ b_n=a_{n-1}+b_{n-1} \end{cases}$

を用いて $a_{\bigcirc}$ **や** $b_{\bigcirc}$ **を消すように変形していきます。**

(3) **「含まない」という否定的な命題はやはり捉えにくいものです。**

そこで，ac，bc という文字列が少なくとも 1 ヵ所あるような並びを考えて，(1) で求めた 243 通りから除くことを考えます。

(2) で $x_5=144$ **と得られていれば，bc を含むものは**

$$3^5-144=99\text{【通り】}$$

ありますから，対称性から，ac を含むものも 99 通りあります。

ac，bc を共に含むものは，5 文字中 4 文字が決定しているということで，ほとんど決定しています。

acbc□　ac□bc　□acbc　bcac□　bc□ac　□bcac

で，□ には3 通りの文字が入るため，$6\cdot3=18$**【通り】 あります。**

よって，ac，bc の少なくとも 1 ヵ所に含むようなワードの総数は

$$99+99-18=180\text{【通り】}$$

ということになるため，$3^5-180=63$**【通り】と求まります。**

【解 1】

(1) 1 文字目 ～ 5 文字目までの文字の選び方はそれぞれ 3 通りずつあるため

$3^5=243$【通り】… 答

(2) 一般に横一列に n 個の文字を並べてできるワードのうち，文字列 bc を含まないような並べ方を x_n 通りとし，

$$\begin{cases} \text{a から始まるワードの総数を } a_n \text{ 通り} \\ \text{b から始まるワードの総数を } b_n \text{ 通り} \\ \text{c から始まるワードの総数を } c_n \text{ 通り} \end{cases}$$

とする。

対称性から $a_n=c_n$ であり，このとき，

$$\begin{aligned} x_n &= a_n+b_n+c_n \\ &= 2a_n+b_n \quad \cdots ① \end{aligned}$$

以下，$n+2$ 文字並べるワードについて考える。

[1] 1 文字目が a のとき

a ○ ○ ○ ○ … ○

残り $n+1$ 文字のワードの総数を考えると，x_{n+1} 通り

よって，$a_{n+2}=x_{n+1}$ …②

[2] 1 文字目が c のとき

c ○ ○ ○ ○ … ○

残り $n+1$ 文字のワードの総数を考えると，x_{n+1} 通り

よって，$c_{n+2}=x_{n+1}$，すなわち $a_{n+2}=x_{n+1}$ を得て，[1] と同じ結果を得る。

[3] 1 文字目が b のとき

b a ○ ○ ○ … ○
b b ○ ○ ○ … ○

残り $n+1$ 文字のワードの総数を考えると，

$a_{n+1}+b_{n+1}$【通り】

よって，$b_{n+2}=a_{n+1}+b_{n+1}$ …③

さて，① より $x_{n+2}=2a_{n+2}+b_{n+2}$ であるから

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= 2a_{n+2}+b_{n+2} \\ &= 2x_{n+1}+a_{n+1}+b_{n+1} \quad (\because ②, ③) \\ &= 2x_{n+1}+x_n+(x_{n+1}-2a_{n+1}) \quad (\because ①) \\ &= 3x_{n+1}+x_n-2a_{n+1} \\ &= 3x_{n+1}+x_n-2x_n \quad (\because ②) \\ &= 3x_{n+1}-x_n \end{aligned}$$

1 文字のワードの総数は 3 通りであるため，$x_1=3$

2 文字のワードの総数は $3^2=9$ 通りのうち，bc を除く 8 通り

よって，$x_2=8$

(*) より

$$\begin{aligned} x_3 &= 3x_2-x_1=3\cdot 8-3=21 \\ x_4 &= 3x_3-x_2=3\cdot 21-8=55 \\ x_5 &= 3x_4-x_3=3\cdot 55-21=144 \end{aligned}$$

よって，5 文字のワードのうち，bc を含まないものは

144 通り … 答

(3) (2) より，bc を含む 5 文字のワードの総数は $3^5-144=99$【通り】

よって，ac を含む 5 文字のワードの総数も 99 通り。

ac，bc を共に含む 5 文字のワードは

acbc□　ac□bc　□acbc　bcac□　bc□ac　□bcac

という形をしており，各々の形の□には 3 通りの選択があるため

$6\times 3=18$【通り】

ゆえに，ac，bc の少なくとも 1 つを含むような 5 文字のワードの総数は

$99+99-18=180$【通り】

したがって，ac，bc を含まない 5 文字のワードの総数は

$3^5-180=63$【通り】… 答

【戦略 2】(2) について

一般化せずに直接数える場合，bc を含まないという否定的なものは数えにくいため，bc を含むものを考える方針をとりたいところです。

bc を含むとなると

bc という塊が 1 つのみ

bc という塊が 2 つ

と場合分けをして各々数えていけばいいでしょう。

【解 2】(2) について

bc を含むような 5 文字のワードの総数を求める。

[1]　bc を 1 つのみ含む場合

3^3 から bc○，○bc を除く

$$\begin{cases} \text{bc○○○，○○○bc} \cdots \text{○○○の入れ方は } 3^3-6=21\text{【通り】} \\ \text{□bc○○，○○bc□} \cdots \begin{cases} \text{□ の入れ方は 3 通り} \\ \text{○○ の入れ方は } 3^2-1=8\text{【通り】} \end{cases} \end{cases}$$

よって，$21\times2+(3\times8)\times2=42+48=90$【通り】

[2]　bc を 2 つ含む場合

bcbc○　bc○bc　○bcbc … ○ の入れ方は 3 通り

よって，$3\times3=9$【通り】

なので，$90+9=99$【通り】 が bc を含むような 5 文字のワードの総数であり，bc を含まないものは (1) より

$243-99=144$【通り】… 答

【総括】

(2) が一般化しても中々のクセモノです。

5 文字程度であればもしかしたら【解 2】の路線で直接数えてしまった方が早いかもしれません。

10 文字とかになるとさすがに【解 1】の路線の方に軍配が上がるでしょう。