10 段の階段を上るのに，1 歩で 1 段，2 段，または 3 段を上ることができるとする。 上り方の総数を求めよ。

＜ ’11 千葉大 改 ＞

【戦略 1】

10 段と言われていますが，一般化し，n 段の上り方を考えます。

これにより，漸化式という強力な武器が使える分野に引きずり込むわけです。

【解 1】

題意のように n 段の階段を昇る方法を a_n 通り $(n=1, 2, \cdots)$ とする。

$n+3$ 段の階段を昇る方法である a_{n+3} について考える。

[1]　最初に 1 段昇るとき

残り $n+2$ 段の昇り方を考えればよく，a_{n+2} 通り

[2]　最初に 2 段昇るとき

残り $n+1$ 段の昇り方を考えればよく，a_{n+1} 通り

[3]　最初に 3 段昇るとき

残り n 段の昇り方を考えればよく，a_n 通り

以上 [1]，[2]，[3] から，

$$a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}+a_n \quad \cdots (*)$$

ここで，a_1 は 1 段の階段の上り方で 1 通りしかないため，$a_1=1$

a_2 は 2 段の階段の上り方で，$\begin{cases} 1\text{段}+1\text{段} \\ 2\text{段} \end{cases}$ という 2 通りの上り方があり $a_2=2$

a_3 は 3 段の階段の上り方で $\begin{cases} 1\text{段}+1\text{段}+1\text{段} \\ 1\text{段}+2\text{段} \\ 2\text{段}+1\text{段} \\ 3\text{段} \end{cases}$ という 4 通りの上り方があり，$a_3=4$

$(*)$ に $n=1, 2, \cdots$ を順次代入していき，$a_1, a_2, a_3, \cdots$ を求めると

$$\begin{aligned}
a_4&=a_3+a_2+a_1=4+2+1=7\\
a_5&=a_4+a_3+a_2=7+4+2=13\\
a_6&=a_5+a_4+a_3=13+7+4=24\\
a_7&=a_6+a_5+a_4=24+13+7=44\\
a_8&=a_7+a_6+a_5=44+24+13=81\\
a_9&=a_8+a_7+a_6=81+44+24=149\\
a_{10}&=a_9+a_8+a_7=149+81+44=274
\end{aligned}$$

よって，10 段の階段を昇る方法は 274 通り … 答

【戦略 2】

1 段上るという事象を S，2 段上るという事象を W，3 段上るという事象を T とし，S，W，T の並べ方をとらえていきます。

まずは S，W，T の個数の内訳を考え，あとはそれらを並べる方法を考えます。

並べるにあたっては，例題と違い変なルールはなく，「同じものを含む順列」という基本的なテーマの数え上げです。

【解 2】

1 段昇るという事象を S，2 段昇るという事象を W，3 段上るという事象を T とする。

S が x 回，W が y 回，T が z 回起こったとすると

$$x+2y+3z=10$$

これを満たす非負整数 x，y，z の組は

$z=3$ のとき，$z=2$ のとき，…
とすると，要領よく探しきれるでしょう。

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z)=&(1,\ 0,\ 3),(0,\ 2,\ 2),(2,\ 1,\ 2),(4,\ 0,\ 2),(1,\ 3,\ 1)\\&(3,\ 2,\ 1),(5,\ 1,\ 1),(7,\ 0,\ 1),(0,\ 5,\ 0),(2,\ 4,\ 0)\\&(4,\ 3,\ 0),(6,\ 2,\ 0),(8,\ 1,\ 0),(10,\ 0,\ 0)\end{aligned}$$

各々の場合における S，W，T の並べ方の総数を求めればよく

$$\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{5!}{2!2!}+\frac{6!}{4!2!}+\frac{5!}{3!}+\frac{6!}{3!2!}+\frac{7!}{5!}+\frac{8!}{7!}+\frac{5!}{5!}+\frac{6!}{2!4!}+\frac{7!}{4!3!}+\frac{8!}{6!2!}+\frac{9!}{8!}+1$$

$$=4+6+30+15+20+60+42+8+1+15+35+28+9+1$$
$=274$【通り】…答

【総括】

原題は

n 段の階段を上るのに，一歩で 1 段，2 段，または 3 段を上ることができるとする。この階段の上り方の総数を a_n とおく。
たとえば，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=4$ である。
(1) a_4，a_5 の値を求めよ。
(2) a_n，a_{n+1}，a_{n+2}，a_{n+3} $(n\geqq 1)$ の間に成り立つ関係式を求めよ。
(3) a_{10} を求めよ。

という問題でした。

例題の京大のイヤらしさ (別にけなしてはいません) がお分かりいただけるでしょう。