$-1\leqq x\leqq 1$ において，$f'(x)\geqq 0$ となる関数 $f(x)$ について

$$\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}f(x)\,dx\geqq 0$$

が成立することを証明せよ。

＜ ’68 筑波大 ＞

【戦略 1】

$\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}f(x)\,dx$ **は「具体的な値 (定数) 」です。**

定数に対して我々は何もできません。

この特別な値を $F(1)$ などと見立てる関数を設定することを考えて

$$F(t)=\int_{-t}^{t}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}f(x)\,dx$$

と設定します。

$F(1)$ **を考えるため，$0\leqq t\leqq 1$ の範囲で考えれば十分です。**

一般に

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{f(t)}^{g(t)}h(x)\,dx&=\frac{d}{dt}\Big[H(t)\Big]_{f(t)}^{g(t)}\quad (H(t)\ \text{は}\ h(t)\ \text{の原始関数})\\&=\frac{d}{dt}\{\,H(g(t))-H(f(t))\,\}\\&=h(g(t))\,g'(t)-h(f(t))\,f'(t)\end{aligned}$$

という基本事項に従って，上記 $F(t)$ を t で微分していきます。

【解 1】

$F(t)=\int_{-t}^{t}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}f(x)\,dx\quad(0\leqq t\leqq 1)$ とおく。

$$\begin{aligned}F'(t)&=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}f(t)\cdot 1-\frac{-t}{\sqrt{1+(-t)^2}}f(-t)\cdot(-1)\\&=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\{\,f(t)-f(-t)\,\}\ \cdots①\end{aligned}$$

$-1\leqq t\leqq 1$ の範囲で $f'(t)\geqq 0$ という条件より，特に $0\leqq t\leqq 1$ においても $f'(t)\geqq 0$ であるから，$f(t)$ は $0\leqq t\leqq 1$ の範囲で単調増加。

$0\leqq t\leqq 1$の範囲では，$t\geqq -t$ であるから，$f(t)\geqq f(-t)$ $\cdots$②

①，② より，$0\leqq t\leqq 1$ の範囲で $F'(t)\geqq 0$

したがって，$0\leqq t\leqq 1$ の範囲で $F(t)$ は単調増加であり，

$$F(t)\geqq F(0)=0$$

特に，$F(1)\geqq 0$ であるため，$\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}f(x)\,dx\geqq 0$ が成り立つ。

【戦略 2】

対称的な積分区間に対して，$\int_{-1}^{0}+\int_{0}^{1}$ というように区間を分割してみたくなる気持ちもあります。

そこから攻め落とすことを狙っても本問は解決します。

【解 2】

$I=\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}f(x)\,dx\left(=\int_{-1}^{0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}f(x)\,dx+\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}f(x)\,dx\right)$

とおく。

また，$I_1=\int_{-1}^{0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}f(x)\,dx$ とする。

I_1 において，$x=-t$ とおくと，$dx=-dt$，

x	$-1\ \to\ 0$
t	$1\ \to\ 0$

$$\begin{aligned}I_1&=\int_{1}^{0}\frac{-t}{\sqrt{1+t^2}}f(-t)(-dt)\\&=-\int_{0}^{1}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}f(-t)\,dt\\&=-\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}f(-x)\,dx\quad(\because\ \text{定積分は積分変数によらない})\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}I&=-\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}f(-x)\,dx+\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}f(x)\,dx\\&=\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\{f(x)-f(-x)\}\,dx\end{aligned}$$

$-1\leqq x\leqq 1$ で $f'(x)\geqq 0$ という条件から，積分区間 $0\leqq x\leqq 1$ において，$f'(x)\geqq 0$ であるため，$f(x)$ は単調増加である。

また，$0\leqq x\leqq 1$ においては $x\geqq -x$ であるから

$$f(x)\geqq f(-x)$$

ゆえに，$0\leqq x\leqq 1$ において $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\{f(x)-f(-x)\}\geqq 0$

したがって，$I\geqq 0$，すなわち $\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}f(x)\,dx\geqq 0$ が成り立つ。

【戦略 3】

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\left(\sqrt{1+x^2}\right)'$$

であることを看破し，部分積分をかますと

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}f(x)\,dx\\&=\Big[\sqrt{1+x^2}f(x)\Big]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^2}\,f'(x)\,dx\\&=\sqrt{2}\{f(1)-f(-1)\}-\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^2}\,f'(x)\,dx\end{aligned}$$

となりますが，積分区間 $-1\leqq x\leqq 1$ に対して

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^2}\,f'(x)\,dx\leqq\int_{-1}^{1}\sqrt{2}\,f'(x)\,dx$$

であることから解決していることに気が付きたいところです。

【解 3】

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}f(x)\,dx&=\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1+x^2}\right)'f(x)\,dx\\&=\Big[\sqrt{1+x^2}f(x)\Big]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^2}\,f'(x)\,dx\\&=\sqrt{2}\{f(1)-f(-1)\}-\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^2}\,f'(x)\,dx\end{aligned}$$

ここで，積分区間 $-1\leqq x\leqq 1$ において，

$$\sqrt{1+x^2}\leqq\sqrt{2}\text{，及び条件の }f'(x)\geqq 0$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^2}\,f'(x)\,dx&\leqq\int_{-1}^{1}\sqrt{2}\,f'(x)\,dx\\&=\sqrt{2}\Big[f(x)\Big]_{-1}^{1}\\&=\sqrt{2}\,\{f(1)-f(-1)\}\end{aligned}$$

移項すれば，$\sqrt{2}\{f(1)-f(-1)\}-\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^2}\,f'(x)\,dx\geqq 0$ となり

$$\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}f(x)\,dx\geqq 0$$

が成り立つことが示された。

【総括】

今回のテーマに即したのは【解 1】です。

定数に対する我々の無力さを受け止めて，一般化することを糧にしてください。