$\left(1+\frac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$ と $\left(1+\frac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}$ の大小を比較せよ。

＜ '02 名古屋大 改 ＞

【戦略】

対数をとって比較しようという気持ちをもちたいところです。

すると

$$\frac{2002}{2001}\log\left(1+\frac{2001}{2002}\right) \text{ と } \frac{2001}{2002}\log\left(1+\frac{2002}{2001}\right) \text{ の勝負}$$

であり，これを

$$f\left(\frac{2002}{2001}\right) \text{ と } f\left(\frac{2001}{2002}\right) \text{ との勝負}$$

という形で見立てたいわけです。

この気持ちから，$f(x)=x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ **という設定に辿り着けるでしょう。**

$$f'(x)=1\cdot\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\cdot\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$$
$$=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$$

なので，今度は

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right) \text{ と } \frac{1}{x+1} \text{ の勝負}$$

ということで

$$g(x)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\quad (x>0)$$

という設定に行きつくでしょう。

$$g'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}+\frac{1}{(x+1)^2}$$
$$=-\frac{1}{x(x+1)^2}<0\quad (\because\ x>0)$$

となり，$x>0$ **の範囲で** $g(x)$ **は単調減少かつ，**$\lim_{x\to\infty}g(x)=0$
なので，$x>0$ **の範囲で** $g(x)>0$ **が確定し，勝負ありです。**

記述では，これを逆算的に（天下り的に）記述します。
（記述する順番的に f，g **の順番も入れ替わっていることに注意してください。）**

【解答】

$f(x)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\ (x>0)$ とする。

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}+\frac{1}{(x+1)^2}$$
$$=-\frac{1}{x(x+1)^2}<0\quad (\because\ x>0)$$

よって，$f(x)$ は $x>0$ の範囲で単調減少である。

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\log 1-0=0$

以上から，$x>0$ の範囲で，$f(x)>0$，すなわち

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)>\frac{1}{x+1}\quad\cdots(*)$$

ここで，$g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\ (x>0)$ とおくと，$\log g(x)=x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$

両辺 x で微分すると

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=1\cdot\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\cdot\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$$
$$=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$$
$$=f(x)$$

よって，$g'(x)=f(x)g(x)>0$

ゆえに，$g(x)$ は $x>0$ の範囲で単調増加であり，$g\left(\frac{2001}{2002}\right)<g\left(\frac{2002}{2001}\right)$

すなわち，$\left(1+\frac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}<\left(1+\frac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$ …答

【総括】

原題では

(1)　x を正の数とするとき，$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ と $\frac{1}{x+1}$ の大小を比較せよ。

(2)　$\left(1+\frac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$ と $\left(1+\frac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}$ の大小を比較せよ。

という誘導がありましたが，ノーヒントでも

「これらの関数の大小が欲しい」

と思えるはずで，そこまで辿り着きたいところです。

なお，実践演習「累乗根と大小比較」というテーマにおいて，同じ年の名古屋大学（文系）の問題を扱いました。

> n を自然数とするとき，3 つの数
> $$a=\sqrt[5]{1+\frac{1}{n}}-1,\ b=1-\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}},\ c=\frac{1}{5n}$$
> の大きさを比較せよ。
>
> ＜ '02 名古屋大 文系 ＞

様々な解法が考えられますが，

> $1>0$，$1+\dfrac{1}{n}>0$ より，相加平均・相乗平均の関係から
> $$1+1+1+1+\left(1+\frac{1}{n}\right)\geqq 5\sqrt[5]{1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$
> 等号成立は $1=1+\dfrac{1}{n}$ のときだが，これはあり得ない。
>
> よって，等号は成立することがなく
> $$5+\frac{1}{n}>5\sqrt[5]{1+\frac{1}{n}}$$
> すなわち，$1+\dfrac{1}{5n}>\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{n}}$ $\left(\Leftrightarrow \sqrt[5]{1+\dfrac{1}{n}}-1<\dfrac{1}{5n}\right)$
>
> ゆえに，$a<c$
>
> 一方，$1>0$，$1-\dfrac{1}{n}\geqq 0$ より，相加平均・相乗平均の関係から
> $$1+1+1+1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\geqq 5\sqrt[5]{1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$
> 等号成立は $1=1-\dfrac{1}{n}$ のときだが，これはあり得ない。
>
> よって，等号は成立することがなく
> $$5-\frac{1}{n}>5\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}}$$
> すなわち，$1-\dfrac{1}{5n}>\sqrt[5]{1-\dfrac{1}{n}}$ $\left(\Leftrightarrow \dfrac{1}{5n}<1-\sqrt[5]{1-\dfrac{1}{n}}\right)$
>
> ゆえに，$c<b$
>
> 以上から
> $$a<c<b \quad \cdots 答$$

という解答を紹介しました。

この解答は

$$「1，1，1，1，1+\frac{1}{n}」，「1，1，1，1，1-\frac{1}{n}」$$

という 5 数に対して相加平均・相乗平均の関係を用いたものですが

この考え方も「一般化」して

$$「1，\overbrace{1+\frac{1}{n}，1+\frac{1}{n}，\cdots，1+\frac{1}{n}}^{n\text{ 個}}」$$

という $n+1$ 個の数に対して相加平均・相乗平均の関係を用いると

$$\frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}\geqq \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\frac{1+n+1}{n+1}\geqq \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$1+\frac{1}{n+1}\geqq \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\geqq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

ということになります。等号成立は $1=1+\dfrac{1}{n}$ となるときですが，それはありえないため，等号成立はあり得ず，

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

ということになります。

これは，本問の【解答】における関数 $g(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ に対して

$$g(1)<g(2)<g(3)<\cdots\cdots$$

という整数の範囲であれば，単調増加であることを意味しています。

もちろんこれを「一般化」すれば，一般の正の実数 x に対して

$g(x)$ が単調増加

であるということが示唆されるわけです。

なお，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ というのは言うまでもないでしょう。