$\sqrt{2}<e^{\frac{1}{e}}$ を示せ。

＜ ’15 信州大 ＞

【戦略】

$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$ と見れば，示すべき不等式は

$$2^{\frac{1}{2}}<e^{\frac{1}{e}}$$

です。

流石にここまでくれば，$f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ という形の関数を設定したくなるでしょう。

もちろん

$$f(2)<f(e)$$

が目標です。

【解答】

$y=x^{\frac{1}{x}}$ $(x>0)$ とおく。

$\log y=\dfrac{1}{x}\log x\left(=\dfrac{\log x}{x}\right)$ であり，両辺 x で微分すると

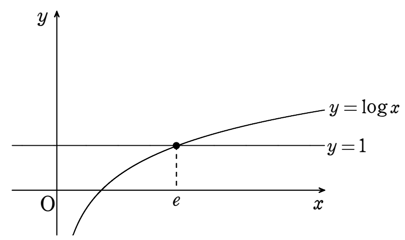
対数微分法

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

ゆえに

$$\frac{dy}{dx}=y\cdot\frac{1-\log x}{x^2}=x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-\log x}{x^2}$$

$x^{\frac{1}{x}}>0$，$x^2>0$ であり，$\dfrac{dy}{dx}$ の符号は $1-\log x$ の符号に一致し，それは $y=1$ と $y=\log x$ のグラフの上下で判断できる。



x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$	
$\dfrac{dy}{dx}$		$+$	0	$-$	
y		↗		↘	

したがって，$f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ としたとき，$f(2)<f(e)$

ゆえに，$2^{\frac{1}{2}}<e^{\frac{1}{e}}$，すなわち $\sqrt{2}<e^{\frac{1}{e}}$ が成り立つ。

【総括】

具体的な数に対して我々ができる手立ては，ほとんどありません。

一般化した関数を設定し，その中の特殊な一例を考えるという考え方をレパートリーの中に入れておきましょう。

なお，$2^{\frac{1}{2}}<e^{\frac{1}{e}}\iff\dfrac{1}{2}\log 2<\dfrac{1}{e}\log e$ であることから，

$$f(x)=\frac{1}{x}\log x\ (x>0)$$

と設定し，$f(2)<f(e)$ を示してもよいでしょう。

示すべき不等式をほぐしてから処理するという工夫もよくやる手立てです。