

ニュートン法【類題】

曲線 $y = x^3 - a$ ($a > 1$) 上の点 $(a, a^3 - a)$ における接線が x 軸と交わる点の x 座標を x_1 とする。次に点 $(x_1, x_1^3 - a)$ における接線が x 軸と交わる点の x 座標を x_2 とする。さらに点 $(x_2, x_2^3 - a)$ における接線が x 軸と交わる点の x 座標を x_3 とする。

この手順を繰り返して得られる数列 $\{x_n\}$ について、次の問に答えよ。

- (1) $3x_n^2x_{n+1} = 2x_n^3 + a$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) であることを示せ。
- (2) $x_n > \sqrt[3]{a}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) であることを示せ。
- (3) $x_{n+1} - \sqrt[3]{a} < \frac{2}{3}(x_n - \sqrt[3]{a})$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) であることを示せ。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ。

< '91 高知大 >