曲線 $y=x^3-a$ $(a>1)$ 上の点 $(a\,,\ a^3-a)$ における接線が x 軸と交わる点の x 座標を x_1 とする。次に点 $(x_1,\ x_1{}^3-a)$ における接線が x 軸と交わる点の x 座標を x_2 とする。さらに点 $(x_2,\ x_2{}^3-a)$ における接線が x 軸と交わる点の x 座標を x_3 とする。

この手順を繰り返して得られる数列 $\{x_n\}$ について，次の問に答えよ。

(1) $3x_n{}^2x_{n+1}=2x_n{}^3+a$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ であることを示せ。

(2) $x_n>\sqrt[3]{a}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$であることを示せ.

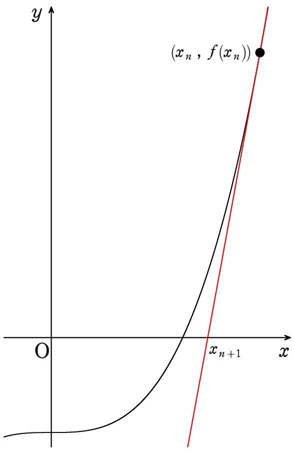
(3) $x_{n+1}-\sqrt[3]{a}<\dfrac{2}{3}\left(x_n-\sqrt[3]{a}\right)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ であることを示せ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ。

＜ ’91 高知大 ＞

【戦略】

基本的な戦略や流れは例題と同じです。



【解答】

(1) $f(x)=x^3-a$ に対して，$f'(x)=3x^2$

$y=f(x)$ 上の点 $(x_n\,,\ f(x_n))$ における接線の方程式は

$$y=3x_n{}^2(x-x_n)+x_n{}^3-a$$

これが $(x_{n+1}\,,\ 0)$ を通るので

$$0=3x_n{}^2(x_{n+1}-x_n)+x_n{}^3-a$$

$$3x_n{}^2x_{n+1}-2x_n{}^3-a=0$$

ゆえに，$3x_n{}^2x_{n+1}=2x_n{}^3+a$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が示された。

(2) $x_0=a$ と定めれば，$3x_n{}^2x_{n+1}=2x_n{}^3+a$ は $n=0$ においても成立する。

$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して $x_n>\sqrt[3]{a}$ $\cdots(*)$ であることを数学的帰納法で示す。

[1] $n=0$ のとき $x_0=a$

$$>a^{\frac{1}{3}}\quad(\text{条件 } a>1 \text{ より})$$

よって，$x_0>\sqrt[3]{a}$ である。

[2] $n=k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ のとき $x_k>\sqrt[3]{a}$ と仮定する。

$$\begin{aligned} x_{k+1}-\sqrt[3]{a}&=\frac{2x_k{}^3+a}{3x_k{}^2}-\sqrt[3]{a}\\ &=\frac{2x_k{}^3+a-3x_k{}^2\sqrt[3]{a}}{3x_k{}^2}\\ &=\frac{(x_k-\sqrt[3]{a})^2(2x_k+\sqrt[3]{a})}{3x_k{}^2}\\ &>0 \end{aligned}$$

因数定理

したがって，$x_{k+1}>\sqrt[3]{a}$ が成り立ち，$(*)$ は $n=k+1$ のときも成り立つ。

[1]，[2] より，$x_n>\sqrt[3]{a}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成立する。

(3)
$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}-\sqrt[3]{a}}{x_n-\sqrt[3]{a}}&=\frac{\dfrac{(x_n-\sqrt[3]{a})^2(2x_n+\sqrt[3]{a})}{3x_n{}^2}}{x_n-\sqrt[3]{a}}\\ &=\frac{1}{3}\cdot\frac{(x_n-\sqrt[3]{a})(2x_n+\sqrt[3]{a})}{x_n{}^2}\\ &=\frac{1}{3}\left(1-\frac{\sqrt[3]{a}}{x_n}\right)\left(2+\frac{\sqrt[3]{a}}{x_n}\right)\\ &=\frac{1}{3}\left\{2-\frac{\sqrt[3]{a}}{x_n}-\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{x_n}\right)^2\right\}\\ &<\frac{2}{3} \end{aligned}$$

(2) より，$x_n-\sqrt[3]{a}>0$ であるから，

$$x_{n+1}-\sqrt[3]{a}<\frac{2}{3}\left(x_n-\sqrt[3]{a}\right)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つ。

(4) (3) の不等式より

$$x_n-\sqrt[3]{a}<\frac{2}{3}(x_{n-1}-\sqrt[3]{a})<\left(\frac{2}{3}\right)^2(x_{n-2}-\sqrt[3]{a})<\cdots<\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(x_1-\sqrt[3]{a})$$

(2) で示した $x_n>\sqrt[3]{a}$ も考えると，

$$0<x_n-\sqrt[3]{a}<\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(x_1-\sqrt[3]{a})$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(x_1-\sqrt[3]{a})\right\}=0$

はさみうちの原理から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x_n-\sqrt[3]{a})=0$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt[3]{a}$ …答

【総括】

例題の３乗根 Ver です。

例題を通じて目線がしっかりとしていれば，やるべきことを見失うことはないはずです。

なお，$x_{n+1}=\dfrac{2x_n{}^3+a}{3x_n{}^2}$ なので，$g(x)=\dfrac{2x^3+a}{3x^2}$ とおくと，$x_{n+1}=g(x_n)$ と言えます。

このように関数による漸化式の極限について，経験があると以下のような方法もあります。

<不動点 $g(x)=x$ を満たす値がただ一つ存在することの証明>

$h(x)=g(x)-x$ とすると，$h(x)=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{a}{3x^2}$ で，

$$h'(x)=-\frac{1}{3}-\frac{2a}{3x^3}$$

$a>1$，$x>0$ という条件の下で $h'(x)<0$ と言え，$h(x)$ は単調減少関数。

$\displaystyle\lim_{x\to+0}h(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}h(x)=-\infty$ なので，$x>0$ の範囲でただ一つ $h(x)=0$ の解が存在し，それを $x=\alpha$ とする。（実はその正体は $\alpha=\sqrt[3]{a}$ です。）

この α は $h(\alpha)=0$，すなわち $g(\alpha)=\alpha$ を満たす値である。

<g' の有界性>

$g(x)=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{a}{3}x^{-2}$ であることから，$a>1$，$x>0$ の範囲の下で

$$g'(x)=\frac{2}{3}-\frac{2a}{3}x^{-3}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{a}{x^3}\right)<\frac{2}{3}$$

<以上を踏まえて>

平均値の定理から，$g(x_n)-g(\alpha)=(x_n-\alpha)g'(c_n)$，すなわち

$$x_{n+1}-\alpha=(x_n-\alpha)g'(c_n)$$

となる c_n が α と x_n の間に存在する。

α，x_n はともに正の値であることから，その間に挟まれる c_n について $c_n>0$ であり，$g'(c_n)<\dfrac{2}{3}$

これにより，$x_{n+1}-\alpha<\dfrac{2}{3}(x_n-\alpha)$ ということが言えます。