a を正の定数とする。$f(x)=x^2-a$ として，グラフ $y=f(x)$ 上の点 $(x_n, f(x_n))$ における接線が x 軸と交わる点の x 座標を x_{n+1} とする。

このようにして，x_1 から順に x_2，x_3，x_4，…… を作るとき，次の問に答えよ。ただし，$x_1>\sqrt{a}$ とする。

(1) x_{n+1} を x_n を用いて表せ。

(2) $\sqrt{a}<x_{n+1}<x_n$ であることを示せ。

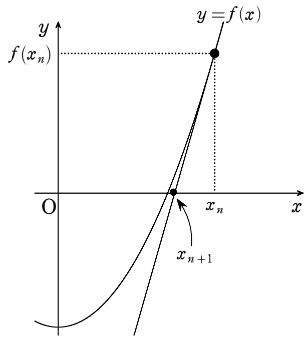
(3) $|x_{n+1}-\sqrt{a}|<\dfrac{1}{2}|x_n-\sqrt{a}|$ であることを示せ。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ を求めよ。

＜ '95 名古屋大 ＞

【戦略】

(1) $(x_n, f(x_n))$ **における接線の方程式を立て，それが $(x_{n+1}, 0)$ を通るということを言えばほぼオシマイです。**



(2) $x_n-x_{n+1}=\cdots=\dfrac{{x_n}^2-a}{2x_n}$ **であることから，$x_n>\sqrt{a}$ を示せば，右側，左側の不等式が同時に解決します。**

この不等式については (1) で漸化式を得たことから数学的帰納法で示すのが第一感です。

(3) **(2) の不等式から絶対値は外れ，結局 $x_{n+1}-\sqrt{a}<\dfrac{1}{2}(x_n-\sqrt{a})$ を示せばよいことになります。**

素直に差を取れば (2) の不等式が効いてきます。

(4) **(3) の不等式から**

$$|x_n-\sqrt{a}|<\frac{1}{2}|x_{n-1}-\sqrt{a}|<\left(\frac{1}{2}\right)^2|x_{n-2}-\sqrt{a}|<\cdots\cdots<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|x_1-\sqrt{a}|$$

と，番号を下げるごとに $\dfrac{1}{2}$ 倍されて上から押さえられていきます。

これより， $0\leqq|x_n-\sqrt{a}|<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}|x_1-\sqrt{a}|\ \left(=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot(\textbf{定数})\right)$

となり，はさみうちの原理で仕留められます。

【解答】

(1) $f(x)=x^2-a$ に対して，$f'(x)=2x$

$y=f(x)$ 上の点 $(x_n, f(x_n))$ における接線の方程式は

$$y=2x_n(x-x_n)+{x_n}^2-a$$

これが $(x_{n+1}, 0)$ を通るので

$$0=2x_n(x_{n+1}-x_n)+{x_n}^2-a$$

$$2x_nx_{n+1}-{x_n}^2-a=0$$

$x_n=0$ とすると，$a=0$ となり，条件 $a>0$ に反するため，$x_n\fallingdotseq 0$

ゆえに，$x_{n+1}=\dfrac{{x_n}^2+a}{2x_n}$ …答

(2) $n=1$，2，… に対して $x_n>\sqrt{a}$ …(*) であることを数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき 条件 $x_1>\sqrt{a}$ から (*) は成り立つ。

[2] $n=k$ ($k=1$，2，…) のとき $x_k>\sqrt{a}$ と仮定する。

$$\begin{aligned} x_{k+1}-\sqrt{a} &= \frac{{x_k}^2+a}{2x_k}-\sqrt{a} \\ &= \frac{{x_k}^2+a-2x_k\sqrt{a}}{2x_k} \\ &= \frac{(x_k-\sqrt{a})^2}{2x_k} \\ &> 0 \end{aligned}$$

したがって，$x_{k+1}>\sqrt{a}$ が成り立ち，(*) は $n=k+1$ のときも成り立つ。

[1]，[2] より，$x_n>\sqrt{a}$ ($n=1$，2，…) が成立する。

このとき，

$$\begin{aligned} x_n-x_{n+1} &= x_n-\frac{{x_n}^2+a}{2x_n} \\ &= \frac{{x_n}^2-a}{2x_n} \\ &> 0 \end{aligned}$$

ゆえに，$x_{n+1}<x_n$

以上から，$\sqrt{a}<x_{n+1}<x_n$ が成立する。

© MathClinic

(3)　(2) で示した不等式から，$\begin{cases} |x_{n+1}-\sqrt{a}\,|=x_{n+1}-\sqrt{a} \\ \dfrac{1}{2}|x_n-\sqrt{a}\,|=\dfrac{1}{2}(x_n-\sqrt{a}\,) \end{cases}$

よって，$x_{n+1}-\sqrt{a}<\dfrac{1}{2}(x_n-\sqrt{a}\,)$ を示せばよい。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(x_n-\sqrt{a}\,)-(x_{n+1}-\sqrt{a}\,)&=\frac{1}{2}x_n-x_{n+1}+\frac{\sqrt{a}}{2}\\&=\frac{1}{2}x_n-\frac{x_n{}^2+a}{2x_n}+\frac{\sqrt{a}}{2}\\&=\frac{x_n\sqrt{a}-a}{2x_n}\\&=\frac{\sqrt{a}\,(x_n-\sqrt{a}\,)}{2x_n}\\&>0\ \ (\because 0<\sqrt{a}<x_n)\end{aligned}$$

ゆえに，$x_{n+1}-\sqrt{a}<\dfrac{1}{2}(x_n-\sqrt{a}\,)$ が示され，題意は示された。

(4)　(3) の不等式より

$$|x_n-\sqrt{a}\,|<\frac{1}{2}|x_{n-1}-\sqrt{a}\,|<\left(\frac{1}{2}\right)^2|x_{n-2}-\sqrt{a}\,|<\cdots\cdots<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|x_1-\sqrt{a}\,|$$

つまり，$0\leqq|x_n-\sqrt{a}\,|<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}|x_1-\sqrt{a}\,|$

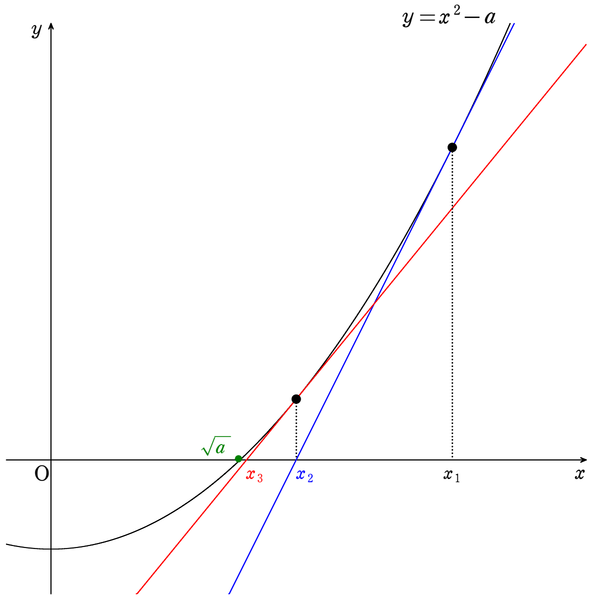
ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|x_1-\sqrt{a}\,|=0$

はさみうちの原理から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|x_n-\sqrt{a}\,|=0$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$　…答

【総括】

数列 $\{x_n\}$ は



というイメージで作られていきます。

$f(x)=0$ の解である $x=\sqrt{a}$ の「よりよい近似解」が得られる数列ということが言えましょう。

この方法で近似を求める方法をニュートン法と言います。

© MathClinic