a，b を実数の定数とし，

$$f(x)=a\sin x+b\sin 2x$$

とするとき，$\int_0^{\pi}\{f(x)\}^2dx$ と $\int_0^{\pi}\{f'(x)\}^2dx$ との大小を比較せよ。

＜ ’64 電気通信大 ＞

【戦略】

$$\{f(x)\}^2=a^2\sin^2 x\ dx+2ab\ \sin 2x\sin x+b^2\sin^2 2x$$

ですが，半角公式，積和公式を用いてほぐせば

$$\{f(x)\}^2=\frac{a^2+b^2}{2}+ab\ \cos x-\frac{a^2}{2}\cos 2x-ab\ \cos 3x-\frac{b^2}{2}\cos 4x$$

となります。

積分計算の要は，$\int_0^{\pi}\cos x\ dx$，$\int_0^{\pi}\cos 2x\ dx$，$\int_0^{\pi}\cos 3x\ dx$，$\int_0^{\pi}\cos 4x\ dx$ **ということになりますが，面倒なので，**$\int_0^{\pi}\cos mx\ dx$（$m=1$，2，$\cdots$）**として計算してしまえばよいでしょう。**

一方で，$f'(x)=a\cos x+2b\cos 2x$ **ですから**

$$\{f'(x)\}^2=a^2\cos^2 x+4ab\cos 2x\cos x+4b^2\cos^2 2x$$

で，同様に半角公式，積和公式でほぐせば

$$\{f'(x)\}^2=\frac{a^2+4b^2}{2}+2ab\ \cos x+\frac{a^2}{2}\cos 2x+2ab\ \cos 3x+2b^2\cos 4x$$

となり，先ほど$\int_0^{\pi}\cos mx\ dx$（$m=1$，2，$\cdots$）**を導出していますから解決です。**

【解答】

$$\begin{aligned}\{f(x)\}^2&=a^2\sin^2 x\ dx+2ab\ \sin 2x\sin x+b^2\sin^2 2x\\&=a^2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}-ab(\cos 3x-\cos x)+b^2\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}\\&=\frac{a^2+b^2}{2}+ab\ \cos x-\frac{a^2}{2}\cos 2x-ab\ \cos 3x-\frac{b^2}{2}\cos 4x\end{aligned}$$

ここで，自然数 m に対して

$$\int_0^{\pi}\cos mx\ dx=\left[\frac{1}{m}\sin mx\right]_0^{\pi}=0\ \cdots①$$

よって，$\int_0^{\pi}\{f(x)\}^2dx=\frac{a^2+b^2}{2}\pi$

一方，$f'(x)=a\cos x+2b\cos 2x$ であり

$$\begin{aligned}\{f'(x)\}^2&=a^2\cos^2 x+4ab\cos 2x\cos x+4b^2\cos^2 2x\\&=a^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}+2ab(\cos 3x+\cos x)+4b^2\cdot\frac{1+\cos 4x}{2}\\&=\frac{a^2+4b^2}{2}+2ab\ \cos x+\frac{a^2}{2}\cos 2x+2ab\ \cos 3x+2b^2\cos 4x\end{aligned}$$

① より，$\int_0^{\pi}\{f'(x)\}^2dx=\frac{a^2+4b^2}{2}\pi$

したがって，

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\{f'(x)\}^2dx-\int_0^{\pi}\{f(x)\}^2dx&=\frac{a^2+4b^2}{2}\pi-\frac{a^2+b^2}{2}\pi\\&=\frac{3b^2\pi}{2}\\&\geqq 0\end{aligned}$$

ゆえに，$\int_0^{\pi}\{f'(x)\}^2dx\geqq\int_0^{\pi}\{f(x)\}^2dx$（等号成立は $b=0$ のとき）

以上から，$\begin{cases}b\neq 0\text{ のとき }\int_0^{\pi}\{f'(x)\}^2dx>\int_0^{\pi}\{f(x)\}^2dx\\ b=0\text{ のとき }\int_0^{\pi}\{f'(x)\}^2dx=\int_0^{\pi}\{f(x)\}^2dx\end{cases}$ …答

【総括】

三角関数の式変形の運用能力と，積分計算の基礎がしっかりできていれば，問題なく跳ね返せる問題です。