p，q を定数，m，n を正の整数とするとき，関数

$$f(x)=p\sin mx+q\cos nx$$

において，次の問に答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\{f'(x)\}^2dx \geqq \int_0^{2\pi}\{f(x)\}^2dx$ を証明せよ。

(2) (1) の不等式で等号が成立するのはどのような場合か。

＜ '63 慶應義塾大 ＞

【戦略】

(1) **今回の被積分関数** $\{f'(x)\}^2$，$\{f(x)\}^2$ **は**

$$\{f'(x)\}^2=m^2p^2\cos^2 mx-2mnpq\cos mx\sin nx+n^2q^2\sin^2 nx]$$
$$\{f(x)\}^2=p^2\sin^2 mx+2pq\sin mx\cos nx+q^2\cos^2 nx$$

であり，結局は

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 mx\,dx,\ \int_0^{2\pi}\sin^2 nx\,dx,\ \int_0^{2\pi}\cos mx\sin nx\,dx$$

という定積分が計算上の要ということになります。
（多少文字の入れ替わりがありますが，本質的には同じことです。）

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2 mx\,dx$，$\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin^2 nx\,dx$ **については半角公式で次数下げ**

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos mx\sin nx\,dx$ **は積和公式で仕留めます。**

今回は，積和公式 $\cos mx\sin nx=\dfrac{1}{2}\{\sin(m+n)x-\sin(m-n)x\}$
を用いる際， $\dfrac{1}{2}$ **が鬱陶しいので，2 乗展開のクロスタームも含めて**

$$2\cos mx\sin nx=\{\sin(m+n)x-\sin(m-n)x\}$$

と見て使っていきます。

なお，普通に積分すると

$$\int_0^{2\pi}\sin(m-n)x\,dx=\left[-\frac{1}{m-n}\cos(m-n)x\right]_0^{2\pi}$$

ですが，分母に $m-n$ **が来てしまい，これが 0 となるかならないか**
を心配する必要がありますから， $m=n$ **のときと** $m\fallingdotseq n$ **のときの場合**
分けが発生することに注意しましょう。

(2) **(1) で，** $\displaystyle\int_0^{2\pi}\{f'(x)\}^2dx-\int_0^{2\pi}\{f(x)\}^2dx=\pi\{p^2(m^2-1)+q^2(n^2-1)\}$
が導出出来ていれば，これが 0 となる条件を考えるだけです。

つまり， $p^2(m^2-1)+q^2(n^2-1)=0$ **となるときを考えるわけですが**
$p^2(m^2-1)+q^2(n^2-1)$ **は**

(0 以上の実数)＋(0 以上の実数)

という構造をしており，これが 0 となるには各々が 0 となるしかなく

$$\begin{cases}p^2(m^2-1)=0\\ q^2(n^2-1)=0\end{cases}$$

というときを考えることになります。

【解答】

(1) $f'(x)=mp\cos mx-nq\sin nx$ であるから

$$\{f'(x)\}^2=m^2p^2\cos^2 mx-2mnpq\cos mx\sin nx+n^2q^2\sin^2 nx]$$

ここで

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 mx\,dx=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2mx}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2m}\sin 2mx\right]_0^{2\pi}=\pi\ \cdots①$$

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 nx\,dx=\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2n}\sin 2nx\right]_0^{2\pi}=\pi\ \cdots②$$

$$2\int_0^{2\pi}\cos mx\sin nx\,dx=\int_0^{2\pi}\{\sin(m+n)x-\sin(m-n)x\}dx$$

$$=\begin{cases}\left[-\dfrac{1}{m+n}\cos(m+n)x+\dfrac{1}{m-n}\cos(m-n)x\right]_0^{2\pi}=0 & (m\fallingdotseq n\ \text{のとき})\\ \displaystyle\int_0^{2\pi}\sin 2mx\,dx=\left[-\frac{1}{2m}\cos 2mx\right]_0^{2\pi}=0 & (m=n\ \text{のとき})\end{cases}$$

いずれにせよ，$\displaystyle 2\int_0^{2\pi}\cos mx\sin nx\,dx=0$ ⋯③

よって，①，②，③ から $\displaystyle\int_0^{2\pi}\{f'(x)\}^2dx=(m^2p^2+n^2q^2)\pi$

一方，$f(x)^2=p^2\sin^2 mx+2pq\sin mx\cos nx+q^2\cos^2 nx$ であり，
①，②，③ から

$$\int_0^{2\pi}\{f(x)\}^2dx=(p^2+q^2)\pi$$

以上から，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\{f'(x)\}^2dx-\int_0^{2\pi}\{f(x)\}^2dx&=(m^2p^2+n^2q^2)\pi-(p^2+q^2)\pi\\&=(m^2p^2-p^2)\pi+(n^2q^2-q^2)\pi\\&=\pi\{p^2(m^2-1)+q^2(n^2-1)\}\\&\geqq 0\ (\because\ m,\ n\ \text{は正の整数})\end{aligned}$$

となり，$\displaystyle\int_0^{2\pi}\{f'(x)\}^2dx\geqq\int_0^{2\pi}\{f(x)\}^2dx$ が成立する。

(2) 等号成立は $\begin{cases}p^2(m^2-1)=0\\ q^2(n^2-1)=0\end{cases}$ のとき

すなわち，$\begin{cases}p=0\\ q=0\end{cases}$ または $\begin{cases}p=0\\ n=1\end{cases}$ または $\begin{cases}m=1\\ q=0\end{cases}$ または $\begin{cases}m=1\\ n=1\end{cases}$
のとき

【総括】

$\int_0^{M\pi} \cos mx \ \sin nx \, dx$ という積分への対応は常識にしておけると，見通しが立ちやすくなりますし，心理的にも「あぁ，基本的には 0 になるからそんなに気にする必要ないわ」という負担感が減るでしょう。

なお，本問で扱った不等式は，ウィルティンガーの不等式と呼ばれる名前のついた不等式です。