２項間不等式

$\{a_n\}$ を正の数からなる数列とし，p を正の実数とする。このとき

$$a_{n+1}>\frac{1}{2}a_n-p$$

を満たす正の整数 n が存在することを証明せよ。

＜ '03 京都大 ＞

【戦略】

存在証明ということは

「何か 1 つでも見つければ勝ち」

なのですが，その「何か 1 つ」というのを直接的に見つけるのは現実的ではありません。

この数列 $\{a_n\}$ は

「正の項からなる」

という条件しか与えらえておらず，具体的に何かの規則にしたがって得られていくわけではありません。

以上諸々のことを考えると，直接的に示すのは困難であるため，背理法で仕留めます。

すなわち，

任意の n に対して $a_{n+1}\leqq\frac{1}{2}a_n-p$ が成り立つ

と仮定して矛盾が起こることを狙います。

この後の処理としては，2 項間漸化式 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n-p$ を解くときと同様の要領で特性方程式 $\alpha=\frac{1}{2}\alpha-p$ の解である $\alpha=-2p$ を用いて

$$a_{n+1}+2p\leqq\frac{1}{2}(a_n+2p)$$

として

$$a_n+2p\leqq\frac{1}{2}(a_{n-1}+2p)\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^2(a_{n-2}+2p)\leqq\cdots\cdots\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1+2p)$$

すなわち，$a_n+2p\leqq(a_1+2p)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ と捌いていきます。

結果的に $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n-p$ から $a_{n+1}+2p=\frac{1}{2}(a_n+2p)$ という変形を得て

$$a_n+2p=(a_1+2p)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

を得るのと同様の要領で

$a_{n+1}\leqq\frac{1}{2}a_n-p$ という関係式から $a_n+2p\leqq(a_1+2p)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ という不等式 Ver の結論を得られるわけです。

肝心の矛盾ですが，$a_n\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1+2p)-2p$ と見ると矛盾していますね。

右辺はどんどん減少し，やがて負の値となり，数列 $\{a_n\}$ は正の項ですから。

【解答】

任意の正の整数 n に対して

$$a_{n+1}\leqq\frac{1}{2}a_n-p$$

が成り立つと仮定する。

$$a_{n+1}+2p\leqq\frac{1}{2}(a_n+2p)$$

よって，

$$a_n+2p\leqq\frac{1}{2}(a_{n-1}+2p)\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^2(a_{n-2}+2p)\leqq\cdots\cdots\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1+2p)$$

これより，$a_n\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1+2p)-2p$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}(\text{右辺})=-2p<0\quad(\because\ \text{条件 } p>0)$$

つまり，(右辺)<0 となる正の整数 n が存在し，その n を N とすると

$$a_N<0$$

これは数列 $\{a_n\}$ が正の数からなる数列であることに矛盾する。

ゆえに仮定は誤りで，

$$a_{n+1}>\frac{1}{2}a_n-p$$

を満たす正の整数 n が存在することが示された。

【総括】

勘違いしたくないのは，$\{a_n\}$ を与える漸化式などの規則はありません。

あくまで正の項からなる数列 $\{a_n\}$ が与えられているに過ぎず，極端な話

$$\{a_n\}:432,\ 200,\ 98,\ \cdots$$

のようなランダムで規則性のない並びも含めた数列ということです。

例えば $p=1$ のとき，上の数列 $\{a_n\}$ で言うと，

$$200\leqq\frac{1}{2}\cdot432-1$$

$$98\leqq\frac{1}{2}\cdot200-1$$

です。

$a_{n+1}\leqq\frac{1}{2}a_n-1$ を満たすように a_3 以降を作っていこうとすると，a_4 は，

$a_4\leqq\frac{1}{2}\cdot98-1$ を満たすように作るわけで，例えば $a_4=48$

a_5 は $a_5\leqq\frac{1}{2}\cdot48-1$ を満たすように作るわけで，例えば $a_5=20$

これ以降，$a_{n+1}\leqq\frac{1}{2}a_n-1$ を満たすように最善を尽くしたとしても，いずれ負の項となって破綻することが目に見えます。

これをフォーマルに記述するとなると背理法が自然に見えてくるでしょう。