

絶対値付きの2項間漸化式

a は $9 < a < 10$ を満たす実数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = |a_n| - 1$$

と定め、 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) a_n を n と a で表せ。
 (2) S_n を n と a で表せ。

< '86 九州大 >

【戦略】

- (1) 絶対値さえなければただの等差数列なのですが、絶対値がつくだけで勝手が違います。

得体のしれない漸化式に対して、まずは実験して様子を掴むことにします。

$$\begin{aligned} a_1 &= a \\ a_2 &= |a| - 1 = a - 1 \\ a_3 &= |a - 1| - 1 = a - 2 \\ &\vdots \\ a_{10} &= |a - 8| - 1 = a - 9 \\ a_{11} &= |a - 9| - 1 = a - 10 \end{aligned}$$

と、ここまでは絶対値がそのまま外れることになります。

次は、

$$a_{12} = |a - 10| - 1 = -(a - 10) - 1 = 9 - a$$

と、絶対値が符号チェンジで外れることになります。

さらにその次は

$$a_{13} = |9 - a| - 1 = -(9 - a) - 1 = a - 10 \quad (= a_{11})$$

となり、 a_{11} と同じになります。

そうなる漸化式という同一アルゴリズムによって以後は

$$a_{11}, a_{12}, a_{11}, a_{12}, \dots$$

と繰り返すことになります。

- (2) a_n を与える式が $\begin{cases} n = 1, 2, \dots, 10 \text{ のとき} \\ n = 11, 13, 15, \dots \text{ のとき} \\ n = 12, 14, 16, \dots \text{ のとき} \end{cases}$ で変わってきます。

したがって、 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ を考える際にも

$$\begin{cases} n = 1, 2, \dots, 10 \text{ のとき} \\ n = 11, 13, 15, \dots \text{ のとき} \\ n = 12, 14, 16, \dots \text{ のとき} \end{cases}$$

という場合分けをして考えていくことになります。

$n = 1, 2, \dots, 10$ のときは特に問題ないでしょうが、

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{10} + (a_{11} + a_{12}) + (a_{11} + a_{12}) + \dots + a_{11}$$

なのか

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{10} + (a_{11} + a_{12}) + (a_{11} + a_{12}) + \dots + (a_{11} + a_{12})$$

という部分に気を付けることになります。

【解答】

- (1) $9 < a < 10$ に注意して、絶対値をはずしていく。

$$\begin{aligned} a_1 &= a \\ a_2 &= |a| - 1 = a - 1 \\ a_3 &= |a - 1| - 1 = a - 2 \\ a_4 &= |a - 2| - 1 = a - 3 \\ a_5 &= |a - 3| - 1 = a - 4 \\ a_6 &= |a - 4| - 1 = a - 5 \\ a_7 &= |a - 5| - 1 = a - 6 \\ a_8 &= |a - 6| - 1 = a - 7 \\ a_9 &= |a - 7| - 1 = a - 8 \\ a_{10} &= |a - 8| - 1 = a - 9 \\ a_{11} &= |a - 9| - 1 = a - 10 \\ a_{12} &= |a - 10| - 1 = -(a - 10) - 1 = 9 - a \\ a_{13} &= |9 - a| - 1 = -(9 - a) - 1 = a - 10 \quad (= a_{11}) \\ a_{14} &= |a_{11}| - 1 = a_{12} \end{aligned}$$

ここから絶対値の外れ方が変わってきます。

以後 $a_{11}, a_{12}, a_{11}, a_{12}, \dots$ と繰り返す。

これより

$$a_n = \begin{cases} a - n + 1 & (n = 1, 2, \dots, 9, 10 \text{ のとき}) \\ a - 10 & (n = 11, 13, 15, \dots \text{ のとき}) \\ 9 - a & (n = 12, 14, 16, \dots \text{ のとき}) \end{cases} \quad \dots \text{ ㊦}$$

- (2) [1] $1 \leq n \leq 10$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (a - k + 1) \\ &= na - \frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= \frac{n}{2} (2a + 1 - n) \end{aligned}$$

- [2] $n \geq 11$ のとき、以下 k を 0 以上の整数とする。

- [2-1] $n = 11 + 2k$ (n が 11 以上の奇数) のとき

$$\begin{aligned} S_n &= S_{10} + (a_{11} + a_{12}) + (a_{13} + a_{14}) + \dots + (a_{n-2} + a_{n-1}) + a_n \\ &= S_{10} + \overbrace{(a_{11} + a_{12}) + (a_{11} + a_{12}) + \dots + (a_{11} + a_{12})}^{k \text{ セット}} + a_{11} \\ &= S_{10} + k(a_{11} + a_{12}) + a_{11} \\ &= S_{10} + k\{(a - 10) + (9 - a)\} + (a - 10) \\ &= \frac{10}{2}(2a + 1 - 10) + k \cdot (-1) + a - 10 \\ &= 11a - k - 55 \\ &= 11a - \frac{n - 11}{2} - 55 \quad \left(\because n = 11 + 2k \text{ より } k = \frac{n - 11}{2} \right) \\ &= 11a - \frac{n + 99}{2} \end{aligned}$$

[2-2] $n = 12 + 2k$ (n が 12 以上の偶数) のとき

$$S_n = S_{10} + (a_{11} + a_{12}) + (a_{13} + a_{14}) + \cdots + (a_{n-3} + a_{n-2}) + (a_{n-1} + a_n)$$

$$\begin{aligned} & \qquad \qquad \qquad \overbrace{\hspace{10em}}^{k+1 \text{ セット}} \\ = & S_{10} + (a_{11} + a_{12}) + (a_{11} + a_{12}) + \cdots + (a_{11} + a_{12}) \\ = & S_{10} + (k+1)(a_{11} + a_{12}) \\ = & S_{10} + (k+1)\{(a-10) + (9-a)\} \\ = & \frac{10}{2}(2a+1-10) + (k+1) \cdot (-1) \\ = & 10a - k - 46 \\ = & 10a - \frac{n-12}{2} - 46 \quad \left(\because n = 12 + 2k \text{ より } k = \frac{n-12}{2} \right) \\ = & 10a - \frac{n+80}{2} \end{aligned}$$

以上から

$$S_n = \begin{cases} \frac{n}{2}(2a+1-n) & (n=1, 2, \dots, 9, 10 \text{ のとき}) \\ 11a - \frac{n+99}{2} & (n \text{ が } 11 \text{ 以上の奇数のとき}) \\ 10a - \frac{n+80}{2} & (n \text{ が } 12 \text{ 以上の偶数のとき}) \end{cases} \quad \dots \text{ ㊦}$$

【総括】

「絶対値さえなければ…」とあわてふためく人も多くいると思います。

あなたがきちんと今まで漸化式を勉強してきた、基本的な漸化式はマスターしている状態であるならば話は早いです。

そんなあなたでも解けない漸化式は「実験して予想する」という一番原始的な態度で攻略することを考えましょう。

例えば、 $a_1=1$ 、 $a_{n+1}=2a_n+3$ という漸化式ならば

$$a_1=1, a_2=5, a_3=13, a_4=29, \dots$$

と予想しても予想できません。

だからこそ特性方程式を余白でこっそり計算して $a_{n+1}+3=2(a_n+3)$ と変形して解き進めていくといった

「その漸化式固有の対処法を施す」

必要性があったわけです。

今回の問題ではそれが通用しないため、実験して全体像を復元しました。

この問題に限らず、手が止まってしまった場合、実験(具体化)して一般論を予想したり全体像を考察したりすることが極めて重要になってきます。

だからこそ皆さんは「解けるものは解ける」と言えなければいけません。