実数 x，y が $|x+y|+|x-y|=2$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1)　$x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

(2)　$|x|+|y|$ の最大値と最小値を求めよ。

＜ '09 群馬大 ＞

【戦略 1】

x，y は好き勝手な値の組になることは許されない

従属 2 変数

です。

文字消去ができればありがたいのですが，文字を消去するにしても絶対値を外す場合分けなどを考えると消極的になるでしょう。

そこで，文字消去が困難なときの従属 2 変数関数の最大最小問題の最有力リカバリーは

逆像法

でしょう。

(1)　$x+y=1$ **になれるか？ →** $\begin{cases} x+y=1 \\ |x+y|+|x-y|=2 \end{cases}$ **を同時に満たす** $(x,\ y)$ **が存在するか？**

$x+y=2$ **になれるか？ →** $\begin{cases} x+y=2 \\ |x+y|+|x-y|=2 \end{cases}$ **を同時に満たす** $(x,\ y)$ **が存在するか？**

という気持ちで

$x+y=k$ **になれるか？ →** $\begin{cases} x+y=k \\ |x+y|+|x-y|=2 \end{cases}$ **を同時に満たす** $(x,\ y)$ **が存在するか？**

ということを考えていき，$x+y=k$ **の** k **としてあり得る値の範囲を求めればよいことになります。**

$\begin{cases} x+y=k \\ |x+y|+|x-y|=2 \end{cases}$ **を同時に満たす** $(x,\ y)$ **が存在するか？**

ということを視覚的に翻訳しなおすと

$\begin{cases} \textbf{直線}\ y=-x+k \\ |x+y|+|x-y|=2\ \textbf{が表す図形} \end{cases}$ **が共有点をもつか**

ということに他なりません。

(2)　(1) **同様に，**$|x|+|y|=\ell$ **になれるか？ と考えて**

$\begin{cases} |x|+|y|=\ell\ \textbf{が表す図形} \\ |x+y|+|x-y|=2\ \textbf{が表す図形} \end{cases}$ **が共有点をもつか**

を考えていきます。

なお，今回扱う図形が，x **軸対称かつ** y **軸対称かつ原点対称ということを看破し，対称性を味方につけながら捌くと労力が減るでしょう。**

【解 1】

(1)　点 $(x,\ y)$ が $|x+y|+|x-y|=2$ …(*) が表す図形上の点であるとき

$$|-x+y|+|-x-y|=|x-y|+|x+y|=2$$
$$|-x-y|+|-x+y|=|x+y|+|x-y|=2$$
$$|x-y|+|x+y|=2$$

であることから，$(-x,\ y)$，$(-x,\ -y)$，$(x,\ -y)$ も (*) が表す図形上の点である。

ゆえに，方程式 (*) が表す図形は

x 軸対称 かつ y 軸対称 かつ 原点対称 …(☆)

したがって，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ の範囲で考えれば十分である。

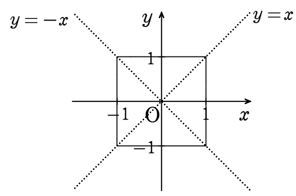
[1]　$0\leqq x\leqq y$ のとき

(*) は $(x+y)-(x-y)=2$，すなわち $y=1$

[2]　$0\leqq y\leqq x$ のとき

(*) は $(x+y)+(x-y)=2$，すなわち $x=1$

[1]，[2] より，(*) が表す図形は (☆) にも注意すると以下の (図 1) のようになる。

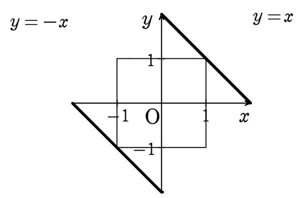


(図 1)

$x+y=k$ とおく。

$y=-x+k$ …① を満たしつつ，(*) を満たす $(x,\ y)$ が存在する k の範囲を求める。

すなわち (図 1) が表す図形と直線 ① が共有点をもつような k の範囲を求めればよい。



(図 2)

(図 2) より，

① が $(1,\ 1)$ を通るとき，すなわち $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ のとき

最大値 2

① が $(-1,\ -1)$ を通るとき，すなわち $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$ のとき

最小値 -2

以上から，$x+y$ の最大値は 2，最小値は -2 …答

(2)　$|x|+|y|=\ell$ $\cdots$ ② とおく。

点 (x, y) が方程式 ② が表す図形上の点であるとき

$$\begin{aligned}|-x|+|y|&=|x|+|y|=\ell\\ |-x|+|-y|&=|x|+|y|=\ell\\ |x|+|-y|&=|x|+|y|=\ell\end{aligned}$$

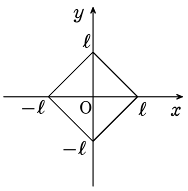
であることから，$(-x, y)$，$(-x, -y)$，$(x, -y)$ も ② が表す図形上の点である。

ゆえに，方程式 ② が表す図形は

x 軸対称 かつ y 軸対称 かつ 原点対称 $\cdots$ (★)

したがって，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の範囲で考えれば十分である。

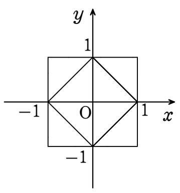
このとき，② は $x+y=\ell$ であるため，(★) を考えると ② が表す図形は以下の (図 3) のようになる。



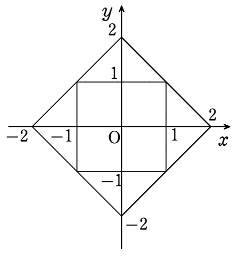
(図 3)

② を満たしつつ，(*) を満たす (x, y) が存在する ℓ の範囲を求める。

すなわち (図 1) が表す図形と (図 3) が表す図形が共有点をもつような ℓ の範囲を求めればよい。



(図 4−1)



(図 4−2)

(図 4−1)，(図 4−2) より $\ell=1$ が最小，$\ell=2$ が最大

以上から，$|x|+|y|$ の最大値は 2，最小値は 1 $\cdots$ 答

【戦略 2】

$|x+y|+|x-y|=2$ に対して，$\begin{cases}x+y=X\\x-y=Y\end{cases}$ とおいて，$|X|+|Y|=2$ と簡単にしてしまう作戦もあります。

このとき $\begin{cases}x=\dfrac{X+Y}{2}\\[2mm] y=\dfrac{X-Y}{2}\end{cases}$ です

(1)　**$\dfrac{X+Y}{2}+\dfrac{X-Y}{2}$，すなわち X の最大値と最小値を考えればよくなります。**

(2)　**$\left|\dfrac{X+Y}{2}\right|+\left|\dfrac{X-Y}{2}\right|$ の最大値と最小値を考えます。**

式的には三角不等式 $|a+b| \leqq |a|+|b|$ を用いてバラしていくのが目に付くでしょうか。

【解 2】(以下，①，② などの番号は若い番号から振りなおす)

$\begin{cases}x+y=X\\x-y=Y\end{cases}$ とおくと，$|x+y|+|x-y|=2$ は

$$|X|+|Y|=2$$

また，このとき，$\begin{cases}x=\dfrac{X+Y}{2}\\[2mm] y=\dfrac{X-Y}{2}\end{cases}$ であることに注意する。

(1)　$x+y=\dfrac{X+Y}{2}+\dfrac{X-Y}{2}=X$

であるため，$|X|+|Y|=2$ であるときに X の最大値を最小値を求める。

点 (X, Y) が $|X|+|Y|=2$ $\cdots$ ① が表す図形上の点であるとき

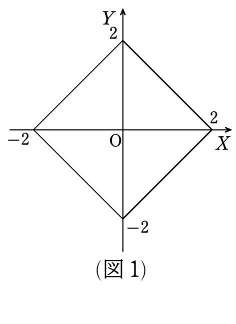
$$\begin{aligned}|-X|+|Y|&=|X|+|Y|=2\\ |-X|+|-Y|&=|X|+|Y|=2\\ |X|+|-Y|&=|X|+|Y|=2\end{aligned}$$

であることから，$(-X, Y)$，$(-X, -Y)$，$(X, -Y)$ も ① が表す図形上の点である。

これより，① が表す図形は

X 軸対称 かつ Y 軸対称 かつ 原点対称

$X \geqq 0$，$Y \geqq 0$ の範囲で，① は $X+Y=2$ となるため，① が表す図形は以下の (図 1) のようになる



(図 1)

(図 1) より，X のとり得る最大値は 2，最小値は -2 $\cdots$ 答

(2)　$|x|+|y|=\left|\dfrac{X+Y}{2}\right|+\left|\dfrac{X-Y}{2}\right|$ より

$|X|+|Y|=2$ のとき，$\left|\dfrac{X+Y}{2}\right|+\left|\dfrac{X-Y}{2}\right|$ の最大値と最小値を求めればよい。

＜最大値について＞

$$\begin{aligned}\left|\frac{X+Y}{2}\right|+\left|\frac{X-Y}{2}\right| &\leqq \frac{1}{2}\{\,|X|+|Y|\,\}+\frac{1}{2}\{\,|X|+|-Y|\,\}\\ &=|X|+|Y|\\ &=2\end{aligned}$$

注　$|a+b|\leqq|a|+|b|$ の等号成立条件は $ab\geqq0$ のときです。

等号成立は $XY\geqq0$ かつ $X\cdot(-Y)\geqq0$，すなわち $XY=0$ のとき

つまり，$(X,\ Y)=(0,\ 2),\ (0,\ -2),\ (2,\ 0),\ (-2,\ 0)$ のとき

ゆえに，$\left|\dfrac{X+Y}{2}\right|+\left|\dfrac{X-Y}{2}\right|$ の最大値は 2

＜最小値について＞

$$\begin{aligned}|X|+|Y| &=|x+y|+|x-y|\\ &\leqq|x|+|y|+|x|+|-y|\\ &=2(\,|x|+|y|\,)\\ &=2\left(\left|\frac{X+Y}{2}\right|+\left|\frac{X-Y}{2}\right|\right)\end{aligned}$$

$|X|+|Y|=2$ より

$$2\leqq2\left(\left|\frac{X+Y}{2}\right|+\left|\frac{X-Y}{2}\right|\right)$$

よって，$\left|\dfrac{X+Y}{2}\right|+\left|\dfrac{X-Y}{2}\right|\geqq1$

等号成立は $xy\geqq0$ かつ $x\cdot(-y)\geqq0$，すなわち $xy=0$ のとき

このとき $\dfrac{X+Y}{2}\cdot\dfrac{X-Y}{2}=0$ で，$X^2=Y^2$，すなわち $|X|=|Y|=1$

$|X|+|Y|=2$ より，$|X|=|Y|=1$

まとめると，$(X,\ Y)=(\pm1,\ \pm1)$（複号任意）のとき等号が成立する。

以上から，$|X|+|Y|=2$ のとき
$\left|\dfrac{X+Y}{2}\right|+\left|\dfrac{X-Y}{2}\right|$ の最大値は 2，最小値は 1

よって，$|x+y|+|x-y|=2$ のとき
$|x|+|y|$ の最大値は 2，最小値は 1　…答

【総括】

逆像法の考え方を視覚的に捉えて捌く線形計画法が第一感です。

不等式から最大最小を狙う路線だと，絶対値についての絶対不等式の代表格である「三角不等式」に照準を定めることになるでしょうが，こちらは手慣れていないと中々出てこないものがあると思います。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

【ウンチク】

「距離」にも色々な定義があり 2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ に対して，普段我々が使っている距離

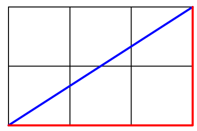
$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

は「ユークリッド距離」と言います。

それに対して

$$|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$

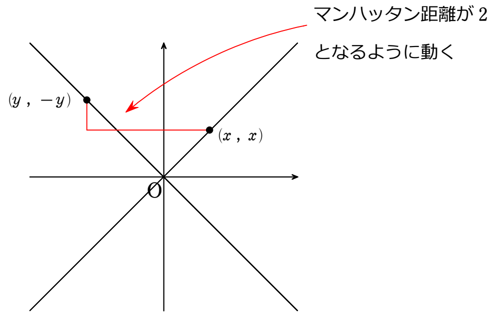
を「マンハッタン距離」と言います。



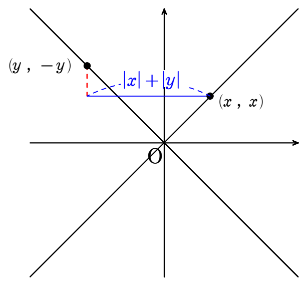
今回の $|x+y|+|x-y|=2$ という条件は

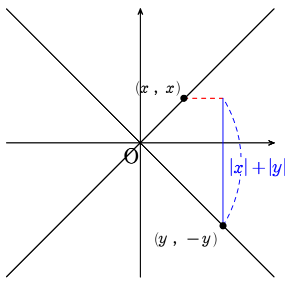
$(x,\ x)$，$(y,\ -y)$ という 2 点に対するマンハッタン距離が 2

ということが言えます。



このとき，





というように長い方の腕が $|x|+|y|$ であり，この最大値と最小値を求められていたことになります。