n を自然数とするとき，3 つの数

$$a=\sqrt[5]{1+\frac{1}{n}}-1,\quad b=1-\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}},\quad c=\frac{1}{5n}$$

の大きさを比較せよ。

＜ '02 名古屋大 ＞

【戦略 1】

ひとまずは「アタリ」をつけたいところです。

試しに $n=1$ とでもしてみると

$$a=\sqrt[5]{2}-1,\quad b=1,\quad c=\frac{1}{5}$$

です。

少なくとも，a，c は $1(=b)$ より小さいことは分かるでしょう。

$a+1$ と $c+1$ の大小を比較してみると，$\sqrt[5]{2}$ と $\frac{6}{5}$ との勝負です。

つまり，$2\left(=\frac{2\cdot5^5}{5^5}\right)$ と $\left(\frac{6}{5}\right)^5\left(=\frac{6^5}{5^5}\right)$ との勝負です。

$2\cdot5^5=5^4\cdot10=6250$，$6^5=7776$ **なので，**$2<\left(\frac{6}{5}\right)^5$

ここから，$\sqrt[5]{2}<\frac{6}{5} \iff a+1<c+1 \iff a<c$ と言えるため，

$$a<c<b$$

と予想がつきます。

$$\begin{aligned} a<c &\iff \sqrt[5]{1+\frac{1}{n}}-1<\frac{1}{5n}\\ &\iff \sqrt[5]{1+\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{5n}\\ &\iff 1+\frac{1}{n}<\left(1+\frac{1}{5n}\right)^5 \end{aligned}$$

と示すべき不等式をほぐしていくと，二項定理が決め手となりそうです。
（解答ではこれを逆算的に記述します。）

一方，

$$\begin{aligned} c<b &\iff \frac{1}{5n}<1-\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}}\\ &\iff \sqrt[5]{1-\frac{1}{n}}<1-\frac{1}{5n}\\ &\iff 1-\frac{1}{n}<\left(1-\frac{1}{5n}\right)^5\\ &\iff 1-\frac{1}{n}<1-\frac{1}{n}+{}_5C_2\left(\frac{1}{5n}\right)^2-{}_5C_3\left(\frac{1}{5n}\right)^3+{}_5C_4\left(\frac{1}{5n}\right)^4-\left(\frac{1}{5n}\right)^5\\ &\iff {}_5C_2\left(\frac{1}{5n}\right)^2-{}_5C_3\left(\frac{1}{5n}\right)^3+{}_5C_4\left(\frac{1}{5n}\right)^4-\left(\frac{1}{5n}\right)^5>0 \end{aligned}$$

と示すべき不等式をほぐしていきます。
（もちろん，解答ではこれを逆算的に記述します。）

【解 1】

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{5n}\right)^5&=1+{}_5C_1\cdot\left(\frac{1}{5n}\right)+{}_5C_2\cdot\left(\frac{1}{5n}\right)^2+{}_5C_3\cdot\left(\frac{1}{5n}\right)^3+{}_5C_4\cdot\left(\frac{1}{5n}\right)^4+\left(\frac{1}{5n}\right)^5\\ &>1+{}_5C_1\cdot\left(\frac{1}{5n}\right)\quad(\because n \text{ は自然数})\\ &=1+\frac{1}{n} \end{aligned}$$

よって，$1+\frac{1}{5n}>\sqrt[5]{1+\frac{1}{n}}$，すなわち $\sqrt[5]{1+\frac{1}{n}}-1<\frac{1}{5n}$

これより，$a<c$

一方，

$$\begin{aligned} \left(1-\frac{1}{5n}\right)^5&=1-{}_5C_1\cdot\left(\frac{1}{5n}\right)+{}_5C_2\cdot\left(\frac{1}{5n}\right)^2-{}_5C_3\cdot\left(\frac{1}{5n}\right)^3+{}_5C_4\cdot\left(\frac{1}{5n}\right)^4-\left(\frac{1}{5n}\right)^5\\ &=1-\frac{1}{n}+\frac{10}{25n^2}-\frac{10}{125n^3}+\frac{5}{625n^4}-\frac{1}{3125n^5}\\ &=1-\frac{1}{n}+\frac{10}{25n^2}\left(1-\frac{1}{5n}\right)+\frac{1}{625n^4}\left(5-\frac{1}{5n}\right)\\ &>1-\frac{1}{n}\quad(\because n \text{ は自然数}) \end{aligned}$$

よって，$1-\frac{1}{5n}>\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}}$，すなわち $\frac{1}{5n}<1-\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}}$

これより，$c<b$

以上から，

$$a<c<b \quad \cdots \text{答}$$

【戦略 2】

目がチカチカする累乗根の部分を

$$p=\sqrt[5]{1+\frac{1}{n}}\ ,\ q=\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}}$$

とおいてしまいます。

すると， $p^5=1+\dfrac{1}{n}$ **なのですが，** p^5-1 **が**

$$(p-1)(p^4+p^3+p^2+p+1)$$

と因数分解できるため，

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}&=p^5-1\\&=(p-1)(p^4+p^3+p^2+p+1)\\&>(p-1)(1+1+1+1+1)\\&=5(p-1)\end{aligned}$$

となり， $p-1<\dfrac{1}{5n}$ （ $\Leftrightarrow\ a<c$ ） **を得ます。**

一方， $q^5=1-\dfrac{1}{n}$ **であり，**

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}&=1-q^5\\&=(1-q)(1+q+q^2+q^3+q^4)\\&<(1-q)(1+1+1+1+1)\\&=5(1-q)\end{aligned}$$

となり， $\dfrac{1}{5n}<1-q$ （ $\Leftrightarrow\ c<b$ ）**を得ます。**

【解 2】

$p=\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{n}}$ ， $q=\sqrt[5]{1-\dfrac{1}{n}}$ とおくと， $\begin{cases}a=p-1\\b=1-q\\c=\dfrac{1}{5n}\end{cases}$ …①

また，$\begin{cases}p^5=1+\dfrac{1}{n}\ \cdots②\\q^5=1-\dfrac{1}{n}\ \cdots③\end{cases}$

② より，

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}&=p^5-1\\&=(p-1)(p^4+p^3+p^2+p+1)\\&>(p-1)(1+1+1+1+1)\ (\because\ p>1)\\&=5(p-1)\end{aligned}$$

ゆえに，$p-1<\dfrac{1}{5n}$ で，① より $a<c$

一方，③ より

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}&=1-q^5\\&=(1-q)(1+q+q^2+q^3+q^4)\\&<(1-q)(1+1+1+1+1)\ (\because\ 0\leqq q<1)\\&=5(1-q)\end{aligned}$$

ゆえに，$\dfrac{1}{5n}<1-q$ で，① より $c<b$

以上から，

$$a<c<b\ \cdots 答$$

【戦略 3】

形から相加平均・相乗平均の関係をインスピレーションすると，ウソのように沈みます。

【解 3】

$1>0$，$1+\dfrac{1}{n}>0$ より，相加平均・相乗平均の関係から

$$1+1+1+1+\left(1+\frac{1}{n}\right)\geqq 5\sqrt[5]{1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

等号成立は $1=1+\dfrac{1}{n}$ のときだが，これはあり得ない。

よって，等号は成立することがなく

$$5+\frac{1}{n}>5\sqrt[5]{1+\frac{1}{n}}$$

すなわち，$1+\dfrac{1}{5n}>\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{n}}$ $\left(\Leftrightarrow \sqrt[5]{1+\dfrac{1}{n}}-1<\dfrac{1}{5n}\right)$

ゆえに，$a<c$

一方，$1>0$，$1-\dfrac{1}{n}\geqq 0$ より，相加平均・相乗平均の関係から

$$1+1+1+1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\geqq 5\sqrt[5]{1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

等号成立は $1=1-\dfrac{1}{n}$ のときだが，これはあり得ない。

よって，等号は成立することがなく

$$5-\frac{1}{n}>5\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}}$$

すなわち，$1-\dfrac{1}{5n}>\sqrt[5]{1-\dfrac{1}{n}}$ $\left(\Leftrightarrow \dfrac{1}{5n}<1-\sqrt[5]{1-\dfrac{1}{n}}\right)$

ゆえに，$c<b$

以上から

$$a<c<b \quad \cdots 答$$

【総括】

ひとまずは，$a<c<b$ であるという予想は立てたいところです。

示すべきことをほぐしていき，決め手を探しに行く【解 1】

目に突き刺さる 5 乗根を置き換えてしまい，目に優しく処理することを考えた【解 2】

このあたりが現実的な路線だと思われます。

【解 3】は観賞用の解答と言ってよいでしょう。