r は 1 とは異なる正の実数で，1，r^2，r^3 がこの順に等差数列になっているものとする。

(1) r の値を求めよ。さらに 2，r，r^2 の大小関係を調べよ。

(2) 自然数 m に対し，1，r^m，r^{m+2} はこの順に等差数列にはならないことを示せ。

(3) 1，r^m，r^n がこの順に等差数列になるような自然数の組 $(m,\ n)$ は $(m,\ n)=(2,\ 3)$ 以外には存在しないことを示せ。

＜ '05 三重大 ＞

【戦略】

(1) **一般に a，b，c がこの順で等差数列となるとき**

$$2b=a+c \quad (\ b \text{ を } a,\ c \text{ の等差中項という}\ )$$

という関係式が成り立ちます。

この等差中項の関係式を用いて $2r^2=1+r^3$，すなわち

$$r^3-2r^2+1=0$$

という 3 次方程式を得ます。

$r=1$ のとき 1，1，1 は等差数列の並びなので，$r^3-2r^2+1=0$ の解の中に $r=1$ が紛れ込むのは当然です。

そのあたりを見据えて，手際よく $(r-1)(r^2-r-1)=0$ と左辺を因数分解しましょう。

$r>0$ より，$r=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ と決定します。

$r^2-r-1=0$ という r の出どころである関係式を用いれば

$r^2=r+1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ ですから，$r<2<r^2$ という大小関係となります。

(2) **否定的な命題であり，背理法を手なりに選択したいところです。**

1，r^m，r^{m+2} がこの順に等差数列であると仮定すると

$$2r^m=1+r^{m+2}$$

となり，これを整理すると $r^m(1-r)=1$ となります。

これを見て，左辺は負の値ですが，右辺は正の値となって矛盾していることを看破しましょう。

(3) **「1，r^m，r^{m+k} という並びも等差数列にならなくない？」**

と思えたらしめたものです。

等差中項の関係式から $2r^m=1+r^{m+k} \iff r^m(2-r^k)=1$

という関係を得て，両辺の符号に注目すれば，$r^k<2$ ということになり，これを満たす自然数 k は $k=1$ のみということになります。

このとき，$r^m(2-r)=1$ となり，$r^m=\dfrac{1}{2-r}$ ということになります。

このあと $\dfrac{1}{2-r}=\cdots\cdots$ と計算していった際に，$\dfrac{1}{2-r}=r^2$ となることを待ち構えながら計算していきましょう。

【解答】

(1) 1，r^2，r^3 がこの順に等差数列になっているため

$$\begin{aligned} & 2r^2=1+r^3 \\ \iff\ & r^3-2r^2+1=0 \\ \iff\ & (r-1)(r^2-r-1)=0 \end{aligned}$$

$r\neq1$ という条件から，$r^2-r-1=0$

$r>0$ という条件から，$r=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ …答

また，$r^2=r+1$ …(*) より，$r^2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

$2<\sqrt{5}<3$ より，$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<\dfrac{1+3}{2}<\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}$

すなわち $r<2<r^2$ …答

(2) 1，r^m，r^{m+2} がこの順に等差数列であると仮定する。

$$\begin{aligned} & 2r^m=1+r^{m+2} \\ \iff\ & r^m(2-r^2)=1 \\ \iff\ & r^m\{2-(r+1)\}=1 \quad (\ \because\ (*)\ ) \\ \iff\ & r^m(1-r)=1 \quad \cdots ① \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} 1-r&=1-\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ &<0 \end{aligned}$$

ゆえに，① の左辺は負の値，① の右辺は正の値となり矛盾する。

これより，仮定が誤りで，1，r^m，r^{m+2} はこの順に等差数列とならない。

(3) $r=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}>1$ より，1，r^m，r^n がこの順で等差数列となるとしたら

$$1<r^m<r^n$$

ゆえに，$n>m$ であり，自然数 k を用いて $n=m+k$ と表せる。

以下，1，r^m，r^{m+k} がこの順で等差数列となるときを考える。

このとき，$2r^m=1+r^{m+k} \iff r^m(2-r^k)=1$ …②

② の両辺の符号に注意すると，$2-r^k>0$，すなわち $r^k<2$ …③

(1) より，$r<2<r^2$（$<r^3<r^4<\cdots$）であるから，③ を満たす自然数 k は $k=1$ のみであり，

$$r^m(2-r)=1$$

これより，

$$\begin{aligned} r^m &= \frac{1}{2-r} \\ &= \frac{1}{2-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ &= \frac{2}{3-\sqrt{5}} \\ &= \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ &= r^2 \end{aligned}$$

これより，$m=2$ であり，$n=2+1=3$

以上から，1，r^m，r^n がこの順に等差数列となるような自然数の組 (m, n) は

$$(m, n)=(2, 3)$$

のみである。

【総括】

$$a, b, c \text{ がこの順に等差数列である} \iff 2b=a+c$$

ということは常識にしておきましょう。

(証明)

a，b，c がこの順に等差数列である

$\iff$ $b-a=c-b$

$\iff$ $2b=a+c$

⑶ では，⑵ が絶妙なヒントとなっており

$n=m+$● という形で見れるかどうか

という本問の急所をほのめかしています。