n 個のボールを $2n$ 個の箱へ投げ入れる。各ボールはいずれかの箱に入るものとし，どの箱に入る確率も等しいとする。どの箱にも 1 個以下のボールしか入っていない確率を p_n とする。

このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{n}$ を求めよ。

＜ '10 京都大 ＞

【戦略】

1 個ずつ箱に入れていくと考えると，類題 1 と同じです。

【解答】

1 個ずつ箱に入れると考えてもよい。

1 個目： どの箱を選んでもよく，$2n$ 通り
2 個目： 1 個目で入れた箱以外の $2n-1$ 通り
3 個目： 1 個目 ～ 2 個目で入れた箱以外の $2n-2$ 通り
4 個目： 1 個目 ～ 3 個目で入れた箱以外の $2n-3$ 通り
⋮
n 個目： 1 個目 ～ $n-1$ 個目で入れた箱以外の $2n-(n-1)$ 通り

よって，

$$p_n=\frac{2n}{2n}\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-2}{2n}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{2n}$$

$$\begin{aligned}\frac{\log p_n}{n}&=\frac{1}{n}\log\left(\frac{2n}{2n}\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-2}{2n}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{2n}\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\frac{2n-k}{2n}\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(1-\frac{k}{2n}\right)\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{n}&=\int_0^1\log\left(1-\frac{x}{2}\right)\\&=\int_0^1\log\frac{-x+2}{2}\,dx\\&=\int_0^1\{\log(-x+2)-\log 2\}\,dx\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\int\log(-x+2)\,dx&=-\int(-x+2)'\log(-x+2)\,dx\\&=-\left\{(-x+2)\log(-x+2)-\int(-x+2)\cdot\frac{(-1)}{-x+2}\,dx\right\}\\&=-\left\{(-x+2)\log(-x+2)+\int dx\right\}\\&=(x-2)\log(-x+2)-x+C\ (C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\log(-x+2)\,dx&=\Big[(x-2)\log(-x+2)-x\Big]_0^1\\&=\{(-1)\log 1-1\}-\{-2\log 2-0\}\\&=2\log 2-1\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{n}&=(2\log 2-1)-\log 2\\&=\log 2-1\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

【総括】

類題１を見ると，他大学の過去問演習も無駄ではないと思えてきますね。