N 個 $(N \geqq 2)$ の箱の中に 1 回に 1 つずつ無作為に玉を入れていく。玉が 2 つ入った箱ができたら，そこでその手続きを中止する。

ちょうど k 回目で玉が 2 つ入った箱ができる確率を $P(N,k)$ とする。

(1) $2 \leqq k \leqq N+1$ のとき，$P(N,k)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log P(2N,N+1)$ を区分求積法を用いて求めよ。

＜ '99 名古屋大 ＞

【戦略】

(1) **$P(N,k)$ というのは，噛み砕くと**

$$\begin{cases}1\text{ 回目} \sim k-1 \text{ 回目は } k-1 \text{ 個の玉を異なる } k-1 \text{ 個の箱に入れる}\\ k \text{ 回目は既に玉が入っている } k-1 \text{ 個の箱のどこかに入れる}\end{cases}$$

という確率ということです。

(2) **(1) で得た $P(N,k)$ において，$\begin{cases}N\to 2N\\ k\to N+1\end{cases}$ と置き換えれば $P(2N,N+1)$ を得ます。**

詳しい計算過程は【解答】でやりますが，

$$P(2N,N+1)=\left(1-\frac{1}{2N}\right)\left(1-\frac{2}{2N}\right)\cdots\left(1-\frac{N}{2N}\right)$$

と得られます。

これさえ得られれば

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\log P(2N,N+1)&=\frac{1}{N}\log\left(1-\frac{1}{2N}\right)\left(1-\frac{2}{2N}\right)\cdots\left(1-\frac{N}{2N}\right)\\&=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log\left(1-\frac{i}{2N}\right)\end{aligned}$$

と，問題の指示にある区分求積法を匂わす形が現れますから方針面で困ることはありません。

$N\to\infty$ **とすると，** $\displaystyle\int_0^1\log\left(1-\frac{x}{2}\right)dx$ **となります。**

$\displaystyle\int\log x\,dx$ **の捌き方の基本は**

$$\begin{aligned}\int\log x\,dx&=\int(x)'\log x\,dx\\&=x\log x-\int x\cdot(\log x)'dx\\&=x\log x-x+C\quad(C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

という部分積分です。

部分積分において log はワガママなやつで，(　)'（ダッシュ）の服を着たがりません。

【解答】

(1) 各回における玉を入れる箱の選択肢は

1 回目： どの箱を選んでもよく，N 通り

2 回目： 1 回目で選んだ箱以外の $N-1$ 通り

3 回目： 1 回目 ～ 2 回目で選んだ箱以外の $N-2$ 通り

4 回目： 1 回目 ～ 3 回目で選んだ箱以外の $N-3$ 通り

⋮

$k-1$ 回目： 1 回目 ～ $k-2$ 回目で選んだ箱以外の $N-(k-2)$ 通り

k 回目： 1 回目 ～ $k-1$ 回目で玉を入れた箱の $k-1$ 通り

よって，

$$\begin{aligned}P(N,k)&=\frac{N}{N}\cdot\frac{N-1}{N}\cdot\frac{N-2}{N}\cdot\cdots\cdot\frac{N-(k-2)}{N}\cdot\frac{k-1}{N}\\&=\frac{(k-1)\cdot{}_N\mathrm{P}_{k-1}}{N^k}\\&=\frac{(k-1)\cdot\dfrac{N!}{\{N-(k-1)\}!}}{N^k}\\&=\frac{k-1}{N^k}\cdot\frac{N!}{(N-k+1)!}\cdots\text{答}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}P(2N,N+1)&=\frac{(N+1)-1}{(2N)^{N+1}}\cdot\frac{(2N)!}{\{2N-(N+1)+1\}!}\\&=\frac{N}{(2N)^{N+1}}\cdot\frac{(2N)!}{N!}\\&=\frac{1}{(2N)^{N+1}}\cdot\frac{(2N)!}{(N-1)!}\\&=\frac{1}{(2N)^{N+1}}\cdot\frac{(2N)(2N-1)\cdots(2N-N)\{2N-(N+1)\}\cdots 2\cdot 1}{(N-1)!}\\&=\frac{(2N)(2N-1)\cdots(2N-N)}{(2N)^{N+1}}\\&=\frac{2N}{2N}\cdot\frac{2N-1}{2N}\cdot\cdots\cdot\frac{2N-N}{2N}\\&=\left(1-\frac{1}{2N}\right)\left(1-\frac{2}{2N}\right)\cdots\left(1-\frac{N}{2N}\right)\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\log P(2N,N+1)&=\frac{1}{N}\log\left(1-\frac{1}{2N}\right)\left(1-\frac{2}{2N}\right)\cdots\left(1-\frac{N}{2N}\right)\\&=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log\left(1-\frac{i}{2N}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log P(2N,N+1)&=\int_0^1\log\left(1-\frac{x}{2}\right)dx\\&=\int_0^1\log\frac{-x+2}{2}\,dx\\&=\int_0^1\{\log(-x+2)-\log 2\}dx\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\int \log(-x+2)\,dx &= -\int (-x+2)'\log(-x+2)\,dx\\ &= -\left\{(-x+2)\log(-x+2)-\int(-x+2)\cdot\frac{(-1)}{-x+2}\,dx\right\}\\ &= -\left\{(-x+2)\log(-x+2)+\int dx\right\}\\ &= (x-2)\log(-x+2)-x+C \quad (C\text{は積分定数})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log(-x+2)\,dx &= \Big[(x-2)\log(-x+2)-x\Big]_0^1\\ &= \{(-1)\log 1-1\}-\{-2\log 2-0\}\\ &= 2\log 2-1\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log P(2N,\ N+1) &= 2\log 2-1-\log 2\\ &= \log 2-1 \ \cdots \text{答}\end{aligned}$$

【総括】

(1) は，1 回目から $k-1$ 回目において

$$\begin{cases}\text{玉を入れる箱の選び方が }{}_N\mathrm{C}_{k-1}\text{ 通り}\\ \text{どの順番で玉を入れるかが }(k-1)!\text{ 通り}\end{cases}$$

k 回目は既に玉が入っている $k-1$ 個の箱から選ぶと考えて

$$\begin{aligned}\frac{{}_N\mathrm{C}_{k-1}\cdot(k-1)!\cdot(k-1)}{N^k} &= \frac{k-1}{N^k}\cdot\frac{N!}{(k-1)!\,(N-k+1)!}\cdot(k-1)!\\ &= \frac{k-1}{N^k}\cdot\frac{N!}{(N-k+1)!}\end{aligned}$$

としてもよいでしょう。(解答とほぼ同じことですが)

計算過程の所々で約分の誘惑がありますが，下手に約分などで消して見えなくしてしまうと，何個の掛け算なのかを見失い，かえって混乱しかねません。

「区分求積法を用いて」という一文は，ありがたいと思うか余計なお世話と思うかは人それぞれだと思いますが，個人的には指示がなくても手なりに進めていけば区分求積法でいきたくなる形だとは思います。