確率と区分求積法

n を自然数とする。箱の中に $n+1$ 個の赤い玉と，1 個の白い玉，計 $n+2$ 個の玉が入っている。

このとき，以下の一連の操作 (ア) ～ (ウ) を n 回繰り返す。

(ア)　箱の中から玉を 1 個無作為に取り出す。
(イ)　取り出した玉を箱に戻す。
(ウ)　箱の中に赤い玉を 1 個追加する。

以下の問いに答えよ。

(1)　白い玉を 1 回も取り出さない確率を n を用いて表せ。
(2)　白い玉をちょうど 1 回取り出す確率を q_n とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n$ を求めよ。

＜ ’19 兵庫県立大 ＞

【戦略】

結局，

毎回赤い玉が 1 個増える

ということに他ならず，k 回目に赤い玉を取る確率は $\dfrac{n+k}{n+k+1}$ です。

(1)　**1 回目から n 回目まで全て赤を取り出す確率なので**

$$\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{n+2}{n+3}\cdot\cdots\cdot\frac{n+n}{n+n+1}$$

ということになりますが，約分が起こり，結局 $\dfrac{n+1}{2n+1}$ となります。

(2)　**1 回だけ出てくる白い玉が**
1 回目で取ったものなのか，2 回目で取ったものなのか，…
と場合分けをして，それらをシグマすればよいでしょう。

$\begin{cases} 1 \text{ 回目 ～ } k-1 \text{ 回目まで赤い玉を取る} \\ k \text{ 回目に白い玉を取る} \\ k+1 \text{ 回目 ～ } n \text{ 回目まで赤い玉を取る} \end{cases}$ **ということが起こる確率は**

$$\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{n+2}{n+3}\cdot\cdots\cdot\frac{n+k-1}{n+k}\cdot\frac{1}{n+k+1}\cdot\frac{n+k+1}{n+k+2}\cdot\cdots\cdot\frac{n+n}{n+n+1}$$
$$=\frac{n+1}{(n+k)(2n+1)}$$

であるため，$q_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{(n+k)(2n+1)}$

ということになります。

$\sum$ の変数に関係ないものは摘まみだし，

$$q_n=\frac{n+1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

となりますが，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ については，和の極限ということから

区分求積法を狙い，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx$ として仕留める

ことを目論みたいところです。

【解答】

(1)　k 回目の玉の抽出時には，袋の中は

$\begin{cases} \text{赤い玉が } n+k \text{ 個} \\ \text{白い球は 1 個} \end{cases}$

という状態であるため，k 回目の玉の抽出において赤い玉を取り出す確率は

$$\frac{n+k}{n+k+1}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

1 回目 ～ n 回目までの玉の抽出は全て赤い玉であるため，求める確率は

$$\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{n+2}{n+3}\cdot\cdots\cdot\frac{n+n}{n+n+1}=\frac{n+1}{2n+1}\quad\cdots\text{答}$$

(2)　$\begin{cases} 1 \text{ 回目 ～ } k-1 \text{ 回目まで赤い玉を取る} \\ k \text{ 回目に白い玉を取る} \\ k+1 \text{ 回目 ～ } n \text{ 回目まで赤い玉を取る} \end{cases}$ という事象が起こる確率は

$$\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{n+2}{n+3}\cdot\cdots\cdot\frac{n+k-1}{n+k}\cdot\frac{1}{n+k+1}\cdot\frac{n+k+1}{n+k+2}\cdot\cdots\cdot\frac{n+n}{n+n+1}$$
$$=\frac{n+1}{(n+k)(2n+1)}$$

$$\frac{n+1}{\cancel{n+2}}\cdot\frac{\cancel{n+2}}{\cancel{n+3}}\cdot\cdots\cdot\frac{\cancel{n+k-1}}{n+k}\cdot\frac{1}{\cancel{n+k+1}}\cdot\frac{\cancel{n+k+1}}{\cancel{n+k+2}}\cdot\cdots\cdot\frac{\cancel{n+n}}{n+n+1}$$

$$\begin{aligned} q_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{(n+k)(2n+1)}\\ &=\frac{n+1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\\ &=\frac{n+1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{k}{n}}\\ &=\frac{1+\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} q_n&=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\\ &=\frac{1}{2}\Big[\log(1+x)\Big]_0^1\\ &=\frac{1}{2}\log 2\quad\cdots\text{答} \end{aligned}$$

© MathClinic

【総括】

内容自体は標準的な内容であり，とりこぼしたくはありません。

今回の

$$\lim_{n \to i} q_n = \frac{1}{2} \log 2 \left(= 0.3465 \cdots \right)$$

という結果から n が大きいと，白玉が 1 回だけ出る確率はおよそ 34 % 程度だということになります。

$n = 100$ 億 とすると，$\begin{cases} \text{赤玉 100億 1個} \\ \text{白玉 1 個} \end{cases}$ の状態からスタートして

100 億回赤玉を追加していくわけです。

ただでさえ赤玉まみれなのに，そこからさらに赤玉を追加していくわけですから，1 回こっきりでみれば白玉が出てくる確率などチリみたいなものです。

ただ，取り出す回数は 100 億回も取り出せるわけです。

取り出すチャンスが増えれば，まぁそれなりの確率に収束することは予想できるとは思います。

© MathClinic