実数 a，b，c に対し，$g(x)=ax^2+bx+c$ を考え，$u(x)=g(x)\,g\left(\dfrac{1}{x}\right)$ で定義する。

(1) $u(x)$ は $y=x+\dfrac{1}{x}$ の整式 $v(y)$ として表されることを示せ。

(2) 上で求めた $v(y)$ は $-2\leqq y\leqq 2$ の範囲のすべての y に対して $v(y)\geqq 0$ であることを示せ。

＜ '00 慶應義塾大 ＞

【戦略 1】

(1) **$u(x)$ の正体は $(ax^2+bx+c)\left(\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{x}+c\right)$ です。**

これを展開して整理すると

$$a^2+b^2+c^2+ab\left(x+\frac{1}{x}\right)+bc\left(x+\frac{1}{x}\right)+ca\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$$

となり，$y=x+\dfrac{1}{x}$ とおくことで，y で表せる見通しが立ちます。

$x^2+\dfrac{1}{x^2}$ **は** $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$ **と見て，** $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$ **と y で表せるという基本です。**

これにより，

$$\begin{aligned}u(x)&=a^2+b^2+c^2+aby+bcy+ca\,(y^2-2)\\&=cay^2+b\,(c+a)\,y+a^2+b^2+c^2-2ca\end{aligned}$$

というように，y の整式 (今回は 2 次式) で表せることになります。

(2) **$v(y)=\cdots\cdots=$ □ $\geqq 0$ と最後の「よって $\geqq 0$!!」というための根拠としては $(\text{実数})^2$ という形が根拠となるのでしょう。**

そこで，$v(y)=cay^2+b\,(c+a)\,y+a^2+b^2+c^2-2ca$ を

平方完成

していきます。

a，b，c，y のどの文字についても 2 次ですが，せめて最高次の係数が 1 であり，降べきの順に直した際に係数が簡単となりそうな b について整理していきます。

$v(y)\geqq 0$ を示せと言われているからといって y について整理しなければならない理由はどこにもありません。

【解 1】

(1)
$$\begin{aligned}u(x)&=(ax^2+bx+c)\left(\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+c\right)\\&=a^2+b^2+c^2+ab\left(x+\frac{1}{x}\right)+bc\left(x+\frac{1}{x}\right)+ca\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\\&=a^2+b^2+c^2+aby+bcy+ca\,(y^2-2)\\&=cay^2+b\,(c+a)\,y+a^2+b^2+c^2-2ca\end{aligned}$$

ゆえに，$u(x)$ は $y\left(=x+\dfrac{1}{x}\right)$ の整式として表される。

(2)
$$\begin{aligned}v(y)&=cay^2+b\,(c+a)\,y+a^2+b^2+c^2-2ca\\&=b^2+y\,(c+a)b+cay^2+c^2+a^2-2ca\\&=\left\{b+\frac{y\,(c+a)}{2}\right\}^2-\frac{1}{4}y^2(c+a)^2+cay^2+(c-a)^2\\&=\left\{b+\frac{y\,(c+a)}{2}\right\}^2+(c-a)^2-\frac{y^2}{4}\{(c+a)^2+4ca\}\\&=\left\{b+\frac{y\,(c+a)}{2}\right\}^2+(c-a)^2-\frac{y^2}{4}(c-a)^2\\&=\left\{b+\frac{y\,(c+a)}{2}\right\}^2+\left(1-\frac{y^2}{4}\right)(c-a)^2\\&=\left\{b+\frac{y\,(c+a)}{2}\right\}^2+\frac{4-y^2}{4}(c-a)^2\\&\geqq 0\quad(\because\ \text{条件}\ -2\leqq y\leqq 2)\end{aligned}$$

【戦略 2】(2) について

$x+\dfrac{1}{x}=y$ **という関係から，** $x^2-yx+1=0$ **という関係式が成り立ちます。**

そもそも $v(y)$ **の出どころである** $u(x)$ **という式の値が** 0 **以上であることを示すわけです。**

この $u(x)$ **は** $g(x)g\left(\dfrac{1}{x}\right)$ **という形ですが，** $x^2-yx+1=0$ **を満たす** x **は** $-2<y<2$ **であれば虚数です。(判別式から示せます)**

よって， $x^2-yx+1=0$ **を満たす** x**，及び共役な複素数** $\overline{x}$ **に対して**

解と係数の関係から $x\overline{x}=1$ **を得られ，** $u(x)=g(x)g(\overline{x})=|g(x)|^2\geqq 0$

となるため解決です。

$y=\pm 2$ **のときは個別検証します。**

【解 2】(2) について

$x+\dfrac{1}{x}=y$ より，$x^2-yx+1=0$

[1]　$y=2$ のとき

$x^2-2x+1=0 \iff (x-1)^2=0$ だから，$x=1$ であり，

$$\begin{aligned} v(2)&=u(1)\\ &=g(1)\,g\left(\frac{1}{1}\right)\\ &=g(1)^2\\ &\geqq 0 \end{aligned}$$

[2]　$y=-2$ のとき

$x^2+2x+1=0 \iff (x+1)^2=0$ だから，$x=-1$ であり，

$$\begin{aligned} v(-2)&=u(-1)\\ &=g(-1)\,g\left(\frac{1}{-1}\right)\\ &=g(-1)^2\\ &\geqq 0 \end{aligned}$$

[3]　$-2<y<2$ のとき

$x^2-yx+1=0$ を満たす x，及び共役な複素数 $\overline{x}$ に対して

解と係数の関係から，$x\overline{x}=1$ であり，$\dfrac{1}{x}=\overline{x}$

$$\begin{aligned} v(y)&=u(x)\\ &=g(x)\cdot g\left(\frac{1}{x}\right)\\ &=g(x)\cdot g(\overline{x})\\ &=(ax^2+bx+c)\,(a\,\overline{x}^2+b\,\overline{x}+c)\\ &=(ax^2+bx+c)\overline{(ax^2+bx+c)}\\ &=|ax^2+bx+c|^2\\ &\geqq 0 \end{aligned}$$

【戦略 3】(2) について

$-2\leqq y\leqq 2$ **ということから**

$$y=2\cos\theta$$

とおいてしまうのもよくやる技です。

流れは【戦略 2】，【解 2】とほぼ同様です。

【解 3】(2) について

$-2\leqq y\leqq 2$ の範囲の y に対しては，

$$y=2\cos\theta \ (0\leqq\theta<2\pi)$$

と表せる。

このとき，$x+\dfrac{1}{x}=2\cos\theta$ より，$x^2-(2\cos\theta)x+1=0$

すなわち，

$$\begin{aligned} x&=\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-1}\\ &=\cos\theta\pm\sqrt{-\sin^2\theta}\\ &=\cos\theta\pm i\sin\theta \end{aligned}$$

ゆえに，$|x|=1$ であるため，$|x|^2=1$，すなわち $x\cdot\overline{x}=1$

よって，$\dfrac{1}{x}=\overline{x}$

このとき，

$$\begin{aligned} v(y)&=u(x)\\ &=g(x)\cdot g\left(\frac{1}{x}\right)\\ &=g(x)\cdot g(\overline{x})\\ &=(ax^2+bx+c)\,(a\,\overline{x}^2+b\,\overline{x}+c)\\ &=(ax^2+bx+c)\overline{(ax^2+bx+c)}\\ &=|ax^2+bx+c|^2\\ &\geqq 0 \end{aligned}$$

【戦略 4】

$v(y)$ を y の式と見て押し通す方針も当然考えられます。

ただ，その場合，y^2 の係数である ca の符号が定まっていないため，

$$v(y)=ca\left\{y+\frac{b(c+a)}{2ca}\right\}^2+\cdots\cdots$$

と平方完成そのものには劇的な効果はなさそうです

$$-2\leqq y\leqq 2 \text{ の全ての } y \text{ に対して } v(y)\geqq 0$$

という絶対不等式の考え方に基づき，

$-2\leqq y\leqq 2$ における $v(y)$ の最小値が 0 以上

ということを目指していきます。

【解 4】(2) について

$$\begin{aligned}
v(y)&=cay^2+b(c+a)y+a^2+b^2+c^2-2ca\\
&=ca\left\{y^2+\frac{b(c+a)}{ca}y\right\}+a^2+b^2+c^2-2ca\\
&=ca\left\{\left(y+\frac{b(c+a)}{2ca}\right)^2-\frac{b^2(c+a)^2}{4c^2a^2}\right\}+a^2+b^2+c^2-2ca\\
&=ca\left(y+\frac{b(c+a)}{2ca}\right)^2-\frac{b^2(c+a)^2}{4ca}+a^2+b^2+c^2-2ca\\
&=ca\left(y+\frac{b(c+a)}{2ca}\right)^2-\frac{1}{4ca}\left\{b^2(c+a)^2-4ca(a^2+b^2+c^2-2ca)\right\}\\
&=ca\left(y+\frac{b(c+a)}{2ca}\right)^2-\frac{1}{4ca}\left\{b^2(c+a)^2-4ca\left\{(c-a)^2+b^2\right\}\right\}\\
&=ca\left(y+\frac{b(c+a)}{2ca}\right)^2-\frac{1}{4ca}\left\{b^2\left\{(c+a)^2-4ca\right\}-4ca(c-a)^2\right\}\\
&=ca\left(y+\frac{b(c+a)}{2ca}\right)^2-\frac{1}{4ca}\left\{b^2(c-a)^2-4ca(c-a)^2\right\}\\
&=ca\left(y+\frac{b(c+a)}{2ca}\right)^2-\frac{1}{4ca}(c-a)^2(b^2-4ca)
\end{aligned}$$

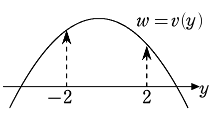
また，$y=\pm 2$ のとき，$x=\pm 1$（複号同順）であり，

$$\begin{aligned}
v(2)&=u(1) & v(-2)&=u(-1)\\
&=g(1)\,g\!\left(\frac{1}{1}\right) & &=g(-1)\,g\!\left(\frac{1}{-1}\right)\\
&=g(1)^2 & &=g(-1)^2\\
&\geqq 0 & &\geqq 0
\end{aligned}$$

であることに注意する。

[1]　$ca<0$ のとき

$w=v(y)$ のグラフは上に凸の放物線であり，



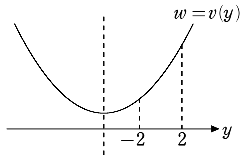
$w=v(y)$ の $-2\leqq y\leqq 2$ における最小値は $v(2)$ または $v(-2)$

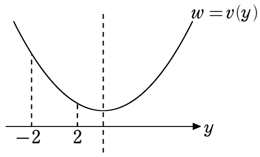
いずれにせよ，$-2\leqq y\leqq 2$ における $v(y)$ の最小値は 0 以上であり，

$$-2\leqq y\leqq 2 \text{ において } v(y)\geqq 0$$

[2]　$ca>0$ のとき

[2−1]　$-\dfrac{b(c+a)}{2ca}\leqq -2$ または $2\leqq -\dfrac{b(c+a)}{2ca}$ のとき



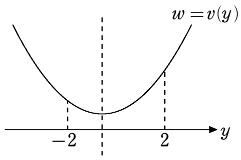


$w=v(y)$ の $-2\leqq y\leqq 2$ における最小値は $v(2)$ または $v(-2)$

いずれにせよ，$-2\leqq y\leqq 2$ における $v(y)$ の最小値は 0 以上で，

$$-2\leqq y\leqq 2 \text{ において } v(y)\geqq 0$$

[2−2]　$-2\leqq -\dfrac{b(c+a)}{2ca}\leqq 2$ のとき



$-2\leqq y\leqq 2$ における最小値は $-\dfrac{1}{4ca}(c-a)^2(b^2-4ca)$

ここで，$-2\leqq -\dfrac{b(c+a)}{2ca}\leqq 2$ より，$\left|\dfrac{b(c+a)}{2ca}\right|\leqq 2$

$ca>0$ に注意すると，$|b(c+a)|\leqq 4ca$

再び $ca>0$ より c，a は同符号であるため，$|c+a|\fallingdotseq 0$ だから

$$|b|\leqq\frac{4ca}{|c+a|}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
b^2-4ca&\leqq\frac{16c^2a^2}{(c+a)^2}-4ca\\
&=\frac{16c^2a^2-4ca(c+a)^2}{(c+a)^2}\\
&=\frac{4ca\left\{4ca-(c+a)^2\right\}}{(c+a)^2}\\
&=\frac{-4ca(c-a)^2}{(c+a)^2}\\
&\leqq 0
\end{aligned}$$

よって，$-\dfrac{1}{4ca}(c-a)^2(b^2-4ca)\geqq 0$ であり，$-2\leqq y\leqq 2$ における $v(y)$ の最小値は 0 以上であり，

$$-2\leqq y\leqq 2 \text{ において } v(y)\geqq 0$$

以上 [1]，[2] から，$-2\leqq y\leqq 2$ において $v(y)\geqq 0$ が成り立つ。

【総括】

x，$\dfrac{1}{x}$ についての対称式である式を「相反式」と言い，特に $x+\dfrac{1}{x}$ という相反式については，$x>0$ の範囲において，相加平均・相乗平均の関係から

$$x+\frac{1}{x} \geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$$

ということが言えます。

$x+\dfrac{1}{x}$ は奇関数であることから，

$x<0$ の範囲においては $x+\dfrac{1}{x} \leqq -2$

です。

つまり，普通に考えたら $y \leqq -2$，$2 \leqq y$ のはずです。

しかし，条件で与えられているのは $-2 \leqq y \leqq 2$ です。

このあたりに違和感を感じ取り

複素数としての処理

を意識できると，【解 2】や【解 3】が現実味を帯びてくるでしょう。

$v(y)$ を y のまま見て押し通す【解 4】は思いつきやすいと言えば思いつきやすいのですが，結構腕力が必要で，腕力不足で撤退してしまいやすい路線でしょう。