

相加平均と相乗平均の差【類題】

$0 < a \leq b$ と満たす実数 a, b に対し, 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を
 $a_1 = a, b_1 = b,$

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \quad (n \geq 2)$$

によって定める。

(1) すべての自然数 n に対し,

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$$

が成り立つことを示せ。

(2) すべての自然数 n に対し

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{8a_n}(b_n - a_n)^2$$

が成り立つことを示せ。

(3) $a = 100, b = 900$ のとき, $b_n - a_n < 4$ を満たす最小の n を求めよ。

< '96 京都大 >