$0<a\leqq b$ と満たす実数 a，b に対し，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$a_1=a$，$b_1=b$，

$$a_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}，b_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\quad(n\geqq 2)$$

によって定める。

(1) すべての自然数 n に対し，

$$a_n\leqq a_{n+1}\leqq b_{n+1}\leqq b_n$$

が成り立つことを示せ。

(2) すべての自然数 n に対し

$$b_{n+1}-a_{n+1}\leqq\frac{1}{8a_n}(b_n-a_n)^2$$

が成り立つことを示せ。

(3) $a=100$，$b=900$ のとき，$b_n-a_n<4$ を満たす最小の n を求めよ。

＜ '96 京都大 ＞

【戦略】

(1) **数学的帰納法で丁寧に示せばよいでしょう。**

(2) **番号を下げて上から押さえるのは経験値があればよくある形なのですが，右辺を見て「なんで２乗？」と思えたらしめたもので**

$$b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}-\sqrt{a_nb_n}=\frac{(\sqrt{b_n}-\sqrt{a_n})^2}{2}$$

です。目標に合わせて有理化を考え，

$$b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{(b_n-a_n)^2}{2(\sqrt{b_n}+\sqrt{a_n})^2}$$

と，$(b_n-a_n)^2$ を登場させます。

したがって，分母に注目し，$(\sqrt{b_n}+\sqrt{a_n})^2\geqq 4a_n$ となる根拠を探せば $\leqq\dfrac{\quad}{8a_n}$ という形で上から押さえられます。

これについては普通に差を取り，

$$\begin{aligned}(\sqrt{b_n}+\sqrt{a_n})^2-4a_n&=b_n+2\sqrt{a_nb_n}-3a_n\\&\geqq a_n+2\sqrt{a_na_n}-3a_n\\&=0\end{aligned}$$

となり，解決です。解答ではこれをコンパクトにまとめます。

(3) $b_1-a_1\geqq b_2-a_2\geqq\cdots\cdots$ **と誤差がどんどん小さくなっていくことは当然のことで，どの段階で誤差が 4 未満になるかが問われているわけです。**

$$\begin{cases}a_1=a=100\\b_1=b=900\end{cases}，\begin{cases}a_2=\sqrt{100\cdot900}=300\\b_2=\dfrac{100+900}{2}=500\end{cases}，\begin{cases}a_3=\sqrt{300\cdot500}=100\sqrt{15}\\b_3=\dfrac{300+500}{2}=400\end{cases}$$

と実験はこの辺りが限界でしょう。

$a_1\leqq a_n\leqq b_n\leqq b_1$ **として** (2) **を用いると**

$$b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{b_n-a_n}{8a_n}(b_n-a_n)\leqq\frac{b_1-a_1}{8a_1}(b_n-a_n)=100(b_n-a_n)$$

とガバガバゆるゆる甘々の使い物にならない不等式が得られます。

$n\geqq 2$ **だと，**$a_2\leqq a_n\leqq b_n\leqq b_2$ **であり，**(2) **を用いると**

$$b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{b_n-a_n}{8a_n}(b_n-a_n)\leqq\frac{b_2-a_2}{8a_2}(b_n-a_n)=\frac{1}{12}(b_n-a_n)$$

と先ほどと違い，今度は 1 未満の倍率で上から押さえられるため今度こそ番号を下げ，上から押さえられます。

番号を下げ続けていくことで，

$$b_n-a_n\leqq\left(\frac{1}{12}\right)^{n-2}(b_2-a_2)=\frac{200}{12^{n-2}}$$

を得ますが，$n\geqq 4$ だと，$\dfrac{200}{12^{n-2}}\leqq\dfrac{200}{12^{4-2}}=\dfrac{200}{144}<4$

となるため，$n\geqq 4$ では $b_n-a_n<4$ となってくれます。

$n=1$，2 **では明らかに $b_n-a_n>4$ ですから，残る問題は**

b_3-a_3 **が 4 より大きいのか小さいのかです。**

$$\begin{aligned}b_3-a_3&=400-100\sqrt{15}\\&=100(4-\sqrt{15})\end{aligned}$$

b_3-a_3 **と 4 の大小を知りたい**

$100(4-\sqrt{15})$ **と 4 の大小を知りたい**

$4-\sqrt{15}$ **と $\dfrac{1}{25}$ の大小を知りたい**

$\dfrac{1}{4-\sqrt{15}}$ $(=4+\sqrt{15})$ **と 25 の大小を知りたい**

と，どんどんほぐしていけば，

$$4+\sqrt{15}<25$$
$$4-\sqrt{15}>\frac{1}{25}$$
$$100(4-\sqrt{15})>4$$
$$b_3-a_3>4$$

と得られるため，解決です。（解答は天下り的に記述します。）

【解答】

(1) $n=1,2,\cdots$ に対して $\begin{cases} a_n \leqq a_{n+1} \leqq b_{n+1} \leqq b_n \\ 0 < a_n \leqq b_n \end{cases}$ $\cdots(*)$ であることを数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき 条件 $0<a\leqq b$ より，$0<a_1\leqq b_1$

$$\begin{aligned} a_2-a_1 &= \sqrt{a_1b_1}-a_1 \\ &= \sqrt{a_1}\left(\sqrt{b_1}-\sqrt{a_1}\right) \geqq 0 \end{aligned}$$

$$b_2-a_2=\frac{a_1+b_1}{2}-\sqrt{a_1b_1}\geqq 0 \text{（∵ 相加平均・相乗平均の関係）}$$

$$\begin{aligned} b_1-b_2 &= b_1-\frac{a_1+b_2}{2} \\ &= \frac{b_1-a_1}{2}\geqq 0 \end{aligned}$$

また，$a_2=\sqrt{a_1b_1}>0$ である。

以上から $\begin{cases} a_1\leqq a_2\leqq b_2\leqq b_1 \\ 0<a_2\leqq b_2 \end{cases}$ が成立し，$n=1$ のとき $(*)$ は正しい。

[2] $n=k$ $(k=1,2,\cdots)$ のとき

$$\begin{cases} a_k\leqq a_{k+1}\leqq b_{k+1}\leqq b_k & \cdots(☆_1) \\ 0<a_k\leqq b_k & \cdots(☆_2) \end{cases}$$

と仮定する。

このとき

$$a_{k+1}=\sqrt{a_kb_k}>0$$

$$\begin{aligned} a_{k+2}-a_{k+1} &= \sqrt{a_{k+1}b_{k+1}}-a_{k+1} \\ &= \sqrt{a_{k+1}}\left(\sqrt{b_{k+1}}-\sqrt{a_{k+1}}\right)\geqq 0 \text{（∵ }(☆_1)\text{）} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{k+2}-a_{k+2} &= \frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2}-\sqrt{a_{k+1}b_{k+1}} \\ &= \frac{a_{k+1}-2\sqrt{a_{k+1}b_{k+1}}+b_{k+1}}{2} \\ &= \frac{\left(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{b_{k+1}}\right)^2}{2}\geqq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{k+1}-b_{k+2} &= b_{k+1}-\frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2} \\ &= \frac{b_{k+1}-a_{k+1}}{2}\geqq 0 \text{（∵ }(☆_1)\text{）} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{k+1}-a_{k+1} &= \frac{a_k+b_k}{2}-\sqrt{a_kb_k} \\ &\geqq 0 \text{（∵ }(☆_2)\text{ 及び 相加平均・相乗平均の関係）} \end{aligned}$$

以上から

$$\begin{cases} a_{k+1}\leqq a_{k+2}\leqq b_{k+2}\leqq b_{k+1} \\ 0<a_{k+1}\leqq b_{k+1} \end{cases}$$

となり，$n=k+1$ のときも $(*)$ は正しい。

以上 [1], [2] より，$n=1,2,\cdots$ に対して

$$a_n\leqq a_{n+1}\leqq b_{n+1}\leqq b_n$$

が成立する。

(2)
$$\begin{aligned} b_{n+1}-a_{n+1} &= \frac{a_n+b_n}{2}-\sqrt{a_nb_n} \\ &= \frac{\left(\sqrt{b_n}-\sqrt{a_n}\right)^2}{2} \\ &= \frac{\left(\sqrt{b_n}-\sqrt{a_n}\right)^2\left(\sqrt{b_n}+\sqrt{a_n}\right)^2}{2\left(\sqrt{b_n}+\sqrt{a_n}\right)^2} \\ &= \frac{(b_n-a_n)^2}{2\left(\sqrt{b_n}+\sqrt{a_n}\right)^2} \\ &\leqq \frac{(b_n-a_n)^2}{2\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_n}\right)^2} \\ &= \frac{1}{8a_n}(b_n-a_n)^2 \end{aligned}$$

となり，示された。

(3) $\begin{cases} a_1=a=100 \\ b_1=b=900 \end{cases}$ のとき，

$$\begin{cases} a_2=\sqrt{100\cdot 900}=300 \\ b_2=\dfrac{100+900}{2}=500 \end{cases},\quad \begin{cases} a_3=\sqrt{300\cdot 500}=100\sqrt{15} \\ b_3=\dfrac{300+500}{2}=400 \end{cases}$$

(2) より $b_{n+1}-a_{n+1}\leqq \dfrac{b_n-a_n}{8a_n}(b_n-a_n)$

$n\geqq 2$ のとき，(1) より，$a_2\leqq a_n\leqq b_n\leqq b_2$ であるため

$$\begin{aligned} \frac{b_n-a_n}{8a_n}(b_n-a_n) &\leqq \frac{b_2-a_2}{8a_2}(b_n-a_n) \\ &= \frac{200}{2400}(b_n-a_n) \\ &= \frac{1}{12}(b_n-a_n) \end{aligned}$$

ゆえに，$b_{n+1}-a_{n+1}\leqq \dfrac{1}{12}(b_n-a_n)$ であるため

$$b_n-a_n\leqq \frac{1}{12}(b_{n-1}-a_{n-1})\leqq \left(\frac{1}{12}\right)^2(b_{n-2}-a_{n-2})\leqq\cdots\leqq \left(\frac{1}{12}\right)^{n-2}(b_2-a_2)$$

よって，$b_n-a_n\leqq \dfrac{200}{12^{n-2}}$

$n\geqq 4$ のとき，$b_n-a_n\leqq \dfrac{200}{12^{n-2}}\leqq \dfrac{200}{12^2}=\dfrac{200}{144}<4$

$n=1,2$ のとき，明らかに $b_n-a_n>4$

$n=3$ のとき

$$\begin{aligned} b_3-a_3 &= 400-100\sqrt{15} \\ &= 100\left(4-\sqrt{15}\right) \end{aligned}$$

ここで，$3<\sqrt{15}<4$ より

$$4+\sqrt{15}<25$$
$$\frac{1}{4+\sqrt{15}}>\frac{1}{25}$$
$$4-\sqrt{15}>\frac{1}{25}$$
$$100\left(4-\sqrt{15}\right)>4$$

以上から，$b_n-a_n<4$ を満たす最小の n は $n=4$ …答

【総括】

(2) は $\dfrac{1}{8a_n}(b_n-a_n)^2-(b_{n+1}-a_{n+1})$

$$=\frac{1}{8a_n}(b_n-a_n)^2-\left(\frac{a_n+b_n}{2}-\sqrt{a_nb_n}\right)$$

$$=\frac{(b_n-a_n)^2-4a_n(a_n+b_n)+8a_n\sqrt{a_nb_n}}{8a_n}$$

$$=\frac{b_n{}^2-6a_nb_n-3a_n{}^2+8a_n\sqrt{a_nb_n}}{8a_n}$$ から，$b_n \geqq a_n$ を用いて

$$\geqq\frac{a_n{}^2-6a_nb_n-3a_n{}^2+8a_n\sqrt{a_na_n}}{8a_n}$$ としても，この先

$$=\frac{6a_n{}^2-6a_nb_n}{8a_n}$$

$$=\frac{6a_n(a_n-b_n)}{8a_n}\leqq 0$$ となって失敗します。

(3) も，$100(4-\sqrt{15})$ を小さくしようとして

$$100(4-\sqrt{15})>100(4-4)=0$$

としても，見ての通り失敗です。

誘導を使うにしても，一度

「砥いで切れ味を良くしてから使う」

と，切れ味を求める辺りは京大らしいと思います。

なお，例題の結果を使うと

$$0<b_n-a_n<\frac{b-a}{2^{n-1}}$$

ということになります。

$n=4$ とすると，$0<b_4-a_4<\dfrac{800}{8}=100$ ということで，やはりガバガバの精度です。

そう考えると，(2) の不等式は例題よりも精度の高い不等式であると言えるでしょう。