$0<x<y$ のとき，次の問に答えよ。

(1) $0<\dfrac{x+y}{2}-\sqrt{xy}<\dfrac{y-x}{2}$ を証明せよ。

(2) $x_1=\sqrt{xy}$，$y_1=\dfrac{x+y}{2}$，$x_2=\sqrt{x_1y_1}$，$y_2=\dfrac{x_1+y_1}{2}$，……

$$x_n=\sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}\text{，}y_n=\frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2}$$

と順次定めるとき，$0<y_n-x_n<\dfrac{y-x}{2^n}$ であることを証明せよ。

＜ '97 滋賀大 ＞

**【戦略】**

(1) **左側の不等式は相加平均・相乗平均の関係から即示せます。**

**右側の不等式についても，手なりに差をとります。**

$$\frac{y-x}{2}-\left(\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}\right)=\sqrt{xy}-x$$

**となりますが，$\sqrt{xy}-x=\sqrt{x}\,(\sqrt{y}-\sqrt{x})$ と $\sqrt{x}$ で括れば明確でしょう。**

(2) **漸化式があるため，数学的帰納法一択と言ってもよいでしょう。**

【解答】

(1) $x>0$，$y>0$ より相加平均・相乗平均の関係から，$\dfrac{x+y}{2}\geqq\sqrt{xy}$

等号成立は $x=y$ のときだが，条件 $0<x<y$ より等号は成立しない。

ゆえに，$\dfrac{x+y}{2}-\sqrt{xy}>0$ …①

一方，

$$\begin{aligned}\frac{y-x}{2}-\left(\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}\right)&=\sqrt{xy}-x\\&=\sqrt{x}\,(\sqrt{y}-\sqrt{x})\\&>0\ (\because\ \text{条件 } 0<x<y)\end{aligned}$$

ゆえに，$\dfrac{x+y}{2}-\sqrt{xy}<\dfrac{y-x}{2}$ …②

①，② より，$0<\dfrac{x+y}{2}-\sqrt{xy}<\dfrac{y-x}{2}$ が成立する。

(2) $n=1，2，\cdots$ に対して $\begin{cases}0<y_n-x_n<\dfrac{y-x}{2^n}\\0<x_n<y_n\end{cases}$ …(*) が成立すること

を $n$ についての数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき

(1) より $0<\dfrac{x+y}{2}-\sqrt{xy}<\dfrac{y-x}{2}$

よって，$0<y_1-x_1<\dfrac{y-x}{2^1}$ が成立する。

また，$0<\sqrt{xy}<\dfrac{x+y}{2}$ より，$0<x_1<y_1$

よって，$n=1$ のとき (*) は正しい。

[2] $n=k$ ($k=1，2，\cdots$) のとき

$\begin{cases}0<y_k-x_k<\dfrac{y-x}{2^k}\\0<x_k<y_k\end{cases}$ …(☆) が成り立つと仮定する。

まず，$x_{k+1}=\sqrt{x_ky_k}>0$，$y_{k+1}=\dfrac{x_k+y_k}{2}>0$ ($\because$ (☆))

$$\begin{aligned}y_{k+1}-x_{k+1}&=\frac{x_k+y_k}{2}-\sqrt{x_ky_k}\\&>0\ (\because\ \text{相加平均・相乗平均の関係})\end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned}\frac{y-x}{2^{k+1}}-(y_{k+1}-x_{k+1})&=\frac{y-x}{2^{k+1}}-\left(\frac{x_k+y_k}{2}-\sqrt{x_ky_k}\right)\\&=\sqrt{x_ky_k}+\frac{1}{2}\left\{\frac{y-x}{2^k}-(x_k+y_k)\right\}\\&>\sqrt{x_ky_k}+\frac{1}{2}\{(y_k-x_k)-(x_k+y_k)\}\ (\because\ (☆))\\&=\sqrt{x_ky_k}-x_k\\&=\sqrt{x_k}\,(\sqrt{y_k}-\sqrt{x_k})\\&>0\ (\because\ (☆))\end{aligned}$$

よって，$y_{k+1}-x_{k+1}<\dfrac{y-x}{2^{k+1}}$

以上から，$\begin{cases} 0<y_{k+1}-x_{k+1}<\dfrac{y-x}{2^{k+1}} \\ 0<x_{k+1}<y_{k+1} \end{cases}$ が成り立ち，$(*)$ は

$n=k+1$ のときも正しい。

以上 [1], [2] から，$n=1$，$2$，$\cdots$ に対して

$$\begin{cases} 0<y_n-x_n<\dfrac{y-x}{2^n} \\ 0<x_n<y_n \end{cases}$$

が成立することが示され，題意は示された。

【総括】

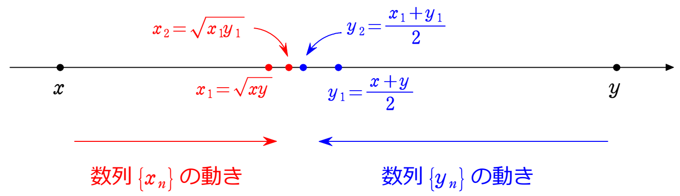
相加平均，相乗平均を取り続けた数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ についての関係です。

$x_n<y_n$ であることはほぼ自明なのですが，本問 (2) の不等式，及びはさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$$

を得るため，やがてこの誤差は 0 に収束していきます。

数直線上のイメージは




というように，段々両サイドから挟まれていく感じです。

（そりゃ，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ になるわという気持ちになると思います。）