a，b，c は絶対値が 1 の実数であり，方程式

$$\sqrt{x+7}+a\sqrt{x+5}+b\sqrt{x+3}+c\sqrt{x+2}=0$$

は実数解をもつとする。

このとき，a，b，c 及び，この方程式の実数解を求めよ。

＜ ’61 横浜国立大 ＞

【戦略 1】

むやみやたらに 2 乗しても見通しは悪いでしょう。

問題文をよく見ると，a，b，c は 1 または -1 のいずれかに対応します。

つまり，実質「符号的役割」に過ぎません。

そう考えると，

$$\sqrt{x+7}+a\sqrt{x+5}+b\sqrt{x+3}+c\sqrt{x+2}$$
$$=\sqrt{x+7}\pm\sqrt{x+5}\pm\sqrt{x+3}\pm\sqrt{x+2}\ （複号任意）$$

という $2^3(=8)$ 通り考えられるわけです。

明らかに $\sqrt{\ }+\sqrt{\ }+\sqrt{\ }+\sqrt{\ }$ はダメでしょう。

ここを皮切りに，

「意外とダメなものだらけじゃないか？」

と思えたらしめたもので，左辺が正となってしまうパターンを削っていきます。

$\sqrt{\ }$ の大小と，中身の大小がリンクすることに注意すると

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}>0$$
$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}>0$$
$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x+5}-\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}>0$$
$$\sqrt{x+7}-\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}>0$$
$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x+5}-\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}>0$$
$$\sqrt{x+7}-\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}>0$$

であるため，6 パターンが削られることになります。

残る

$$\sqrt{x+7}-\sqrt{x+5}-\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}=0$$
$$\sqrt{x+7}-\sqrt{x+5}-\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}=0$$

についてはここまで来たら個別検証です。

基本方針は

$\sqrt{\ }$ を単独独りぼっちにするように移項して 2 乗する

という方針で $\sqrt{\ }$ を外していきます。

ただ，2 乗すると，同値性が失われます。

例えば，$\sqrt{A}=B \Longrightarrow A=B^2$ は言えますが，逆は言えません。

$\Longleftrightarrow$ で結ぶためには，$\sqrt{A}=B \Longleftrightarrow \begin{cases} A=B^2 \\ B\geqq 0 \end{cases}$ です。

このあたりに注意しながら，無理方程式を捌いていきます。

【解 1】

a，b，c が絶対値 1 の実数という条件から

$$\sqrt{x+7}+a\sqrt{x+5}+b\sqrt{x+3}+c\sqrt{x+2}$$

$$=\sqrt{x+7}\pm\sqrt{x+5}\pm\sqrt{x+3}\pm\sqrt{x+2}\ （複号任意）$$

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}>0$$

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}>0$$

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x+5}-\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}>0$$

$$\sqrt{x+7}-\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}>0$$

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x+5}-\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}>0$$

$$\underbrace{\sqrt{x+7}-\sqrt{x+5}}_{正}+\underbrace{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}}_{正}>0$$

[1] $\sqrt{x+7}-\sqrt{x+5}-\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}=0$ について

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}=\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}$$

これを満たす実数 x が存在するとしたら，$x\geqq -2$ であり

このとき，両辺 0 以上であるため，この下で両辺 2 乗しても

同値性は失われない。

$$2x+9+2\sqrt{(x+7)(x+2)}=2x+8+2\sqrt{(x+5)(x+3)}$$

整理すると，$1+2\sqrt{(x+7)(x+2)}=2\sqrt{(x+5)(x+3)}$

$x\geqq -2$ であり，両辺 0 以上であるため，この下で両辺 2 乗しても

同値性は失われない。

$$1+4(x+7)(x+2)+4\sqrt{(x+7)(x+2)}=4(x+5)(x+3)$$

整理すると，$4\sqrt{(x+7)(x+2)}=-4x+3$ …①

これを満たす実数 x が存在するとき，$-4x+3\geqq 0$

すなわち $-2\leqq x\leqq \dfrac{3}{4}$ であり，この下で ① の両辺を 2 乗しても

同値性は失われない。

$$16(x^2+9x+14)=16x^2-24x+9$$

これより，$168x=-215$，すなわち $x=-\dfrac{215}{168}$ を得る。

これは $-2\leqq x\leqq \dfrac{3}{4}$ を満たす。

[2] $\sqrt{x+7}-\sqrt{x+5}-\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}=0$ について

$$\sqrt{x+7}-\sqrt{x+2}=\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}$$

これを満たす実数 x が存在するとしたら，$x \geqq -2$ であり，
このとき両辺は 0 以上であるから，この下で両辺 2 乗しても
同値性は失われない。

$$2x+9-2\sqrt{(x+7)(x+2)}=2x+8+2\sqrt{(x+5)(x+3)}$$

整理すると，$1-2\sqrt{(x+7)(x+2)}=2\sqrt{(x+5)(x+3)}$

$x \geqq -2$ であるため，両辺 0 以上で，この下で両辺 2 乗しても
同値性は失われない。

$$1+4(x+7)(x+2)-4\sqrt{(x+7)(x+2)}=4(x+5)(x+3)$$

整理すると，$4x-3=4\sqrt{(x+7)(x+2)}$

これを満たす実数 x が存在するとき，$4x-3 \geqq 0$

すなわち，$x \geqq \frac{3}{4}$ であり，この下で両辺 2 乗すると，

$$16x^2-24x+9=16(x^2+9x+14)$$

これより，$168x=-215$，すなわち，$x=-\frac{215}{168}$ だが，この x は

$x \geqq \frac{3}{4}$ をみたさない

以上から，

$(a, b, c)=(-1, -1, 1)$ で，そのときの実数解は $x=-\frac{215}{168}$ … 答

【戦略 2】 【解 1】の [2] について（**戦略のみ**）

$\sqrt{x+7}-\sqrt{x+5}-\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}=0$ **について**

ひとまず $\sqrt{x+7}-\sqrt{x+2}=\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}$ **と見て，**$x \geqq -2$ **であるという下で両辺 2 乗すると**

$$1-2\sqrt{(x+7)(x+2)}=2\sqrt{(x+5)(x+3)}$$

を得ます。（ここまでは【解 1】と同じです。）

ここからは観察力の問題ですが，$x \geqq -2$ **であれば**

$$(\text{左辺})=1-(\text{ 0 以上})\leqq 1$$
$$(\text{右辺})\geqq 2\sqrt{(-2+5)(-2+3)}=2\sqrt{3}>1$$

ということになり，この等式を満たす実数 x **は存在しないことになります。**

【総括】

意外と侮れず，$\sqrt{}$ の絡んだ無理方程式に対する扱いに対する習熟度が求められます。

一般論として，$a=b \Longrightarrow a^2=b^2$ は言えますが，$a^2=b^2 \Longrightarrow a=b$ は言えません。

つまり，2 乗すると同値性が崩れてしまいます。

[1] で $-2 \leqq x \leqq \frac{3}{4}$ であること，[2] で $x \geqq \frac{3}{4}$ であることに気がつかないと，実数解 $x=-\frac{215}{168}$ はともかく，$(a, b, c)=(-1, -1, -1)$ も答えに含めてしまい，傷を負ってしまいます。

【補足】

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}=\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}$$

を満たす実数 x が存在するとしたら $x \geqq -2$

というくだりについて補足します。

$-3 \leqq x < -2$ のとき

$\sqrt{x+2}$ が虚数なので，(虚数)＝(実数)

となり等号は成立しません。

$-5 \leqq x < -3$ のとき

Re(左辺)$=\sqrt{x+7}$，Re(右辺)$=\sqrt{x+5}$

となり等号は成立しません。

$-7 < x < -5$ のとき

Re(左辺)$=\sqrt{x+7}\ (>0)$，Re(右辺)$=0$

となり等号は成立しません。

$x \leqq -7$ のときは $x=-7-u\ \ (u \geqq 0)$ とおくと

(左辺)$=\sqrt{-u}+\sqrt{-5-u}=\sqrt{u}\,i+\sqrt{u+5}\,i=(\sqrt{u}+\sqrt{u+5})\,i$
(右辺)$=\sqrt{-2-u}+\sqrt{-4-u}=\sqrt{u+2}\,i+\sqrt{u+4}\,i=(\sqrt{u+2}+\sqrt{u+4})\,i$

$$\sqrt{u}+\sqrt{u+5}=\sqrt{u+2}+\sqrt{u+4}$$

両辺 0 以上なので，$2u+5+2\sqrt{u(u+5)}=2u+6+2\sqrt{(u+2)(u+4)}$

$$2\sqrt{u(u+5)}=1+2\sqrt{(u+2)(u+4)}$$

両辺 2 乗して，$4u(u+5)=1+4(u+2)(u+4)+4\sqrt{(u+2)(u+4)}$

整理すると，$-4u-33=4\sqrt{(u+2)(u+4)}$

$u \geqq 0$ なので，

左辺は負の実数，右辺は正の実数

ということになり，これを満たす u は存在しません。

つまり，$x < -2$ の範囲では

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}=\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}$$

を満たす実数 x は存在しないことになります。

$\sqrt{x+7}-\sqrt{x+2}=\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}$ についても

$-3 \leqq x < -2$ のとき

$\sqrt{x+2}$ のみ虚数なので，(虚数)＝(実数)

となり，等号は成立しません。

$-5 \leqq x < -3$ のとき

Re(左辺)$=\sqrt{x+7}$，Re(右辺)$=\sqrt{x+5}$

となり等号は成立しません。

$-7 < x < -5$ のとき

Re(左辺)$=\sqrt{x+7}\ (>0)$，Re(右辺)$=0$

となり等号は成立しません。

$x \leqq -7$ のときは $x=-7-u\ \ (u \geqq 0)$ とおくと

(左辺)$=\sqrt{-u}-\sqrt{-5-u}=\sqrt{u}\,i-\sqrt{u+5}\,i=(\sqrt{u}-\sqrt{u+5})\,i$
(右辺)$=\sqrt{-2-u}+\sqrt{-4-u}=\sqrt{u+2}\,i+\sqrt{u+4}\,i=(\sqrt{u+2}+\sqrt{u+4})\,i$

$$\sqrt{u}-\sqrt{u+5}=\sqrt{u+2}+\sqrt{u+4}$$

左辺は負の実数，右辺は正の実数

ということになり，これを満たす u は存在しません。

ということでやはり，$x < -2$ の範囲では

$$\sqrt{x+7}-\sqrt{x+2}=\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}$$

を満たす実数 x は存在しないことになります。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

【解答】では

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}=\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}$$

からいきなり $x \geqq -2$ としてしまいましたが，$x < -2$ だとしても，

(虚数)＝(虚数)

の形で等号が成り立つ可能性があるため，厳密にはこれを否定する必要があるでしょう。

例えば

$$x+\sqrt{x-2}=(2x-1)+\sqrt{3x-4}$$

が実数解をもつならば，$x \geqq 2$ であるかと言われるとそうでもありません。

実際，$x=1$ だと，左辺，右辺ともに $1+i$ ということになり，$x=1$ という実数解をもちます。