整式 $h(x)$ が

「すべての整数 n に対して $h(n)$ は整数である」

という条件を満たすとき，$h(x)$ は整数値多項式という。

(1) $f(x)$ が整数値多項式であるとき，整式 $g(x)=f(x+1)-f(x)$ も整数値多項式であることを示せ。

(2) $f(x)$ が 2 次の整数値多項式であるとき，$f(x)$ の x^2 の係数の 2 倍は整数であることを示せ。

(3) $f(x)$ が 3 次の整数値多項式であるとき，$f(x)$ の x^3 の係数の 6 倍は整数であることを示せ。

(4) m が自然数で，$f(x)$ が m 次の整数値多項式であるとき，$f(x)$ の x^m の係数の $m!$ 倍は整数であることを，m に関する数学的帰納法で示せ。

＜ ’05 京都教育大 ＞

【戦略】

(1) **$g(n)=f(n+1)-f(n)$ であり，f(整数)=(整数) なので，ほとんど自明に近いものがありますが，証明問題なので一応 $n+1$ は整数ですよということぐらいは記述しておきます。**

(2)(3) **本問のオチの (4) での帰納法を想定すると，この段階から**

1 次 → 2 次

2 次 → 3 次

という橋渡しを考えていきたいところです。

そこで，問題にはなっていませんが，1 次の整数値多項式に対して x の係数の $1!$ 倍，(要するに x の係数そのもの) が整数となっていることを示すところから始めます。

これについては，例題や類題 1 同様，代入値を考え

$f(0)$，$f(1)$

を考えていけばよいでしょう。

その後，1 次から 2 次の橋渡しを考えます。

(1) の主張がかなりのキーポイントで，

$f(x)$：n **次の整数値多項式**

に対して，

$g(x)$($=f(x+1)-f(x)$)：$n-1$ **次の整数値多項式**

と次数が下がるわけです。

この n 次と $n-1$ 次の整数値多項式を結びつける $f(x+1)-f(x)$ という式が帰納法の橋渡し的役割を担うことが想定できればスムーズに流れていきます。

(4) **(3) までで具体的に**

$m=1 \to m=2 \to m=3$

と，ある意味帰納的に示してきましたから，要領は得ているはずです。

【解答】

(1) 整数 n に対して，$n+1$ も整数である。

$f(x)$ は整数値多項式であるという条件から，$f(n)$，$f(n+1)$ はともに整数である。

ゆえに，任意の整数 n に対して $g(n)=f(n+1)-f(n)$ も整数である。

これより，$g(x)$($=f(x+1)-f(x)$) も整数値多項式である。

(2) $f(x)=a_1x+b_1$ $(a_1\neq 0)$ とする。

$f(x)$ が 1 次の整数値多項式であるとき

$f(0)=$(整数)，$f(1)=$(整数)

$f(0)=b_1$ より，b_1 は整数

$f(1)=a_1+b_1$ より，$a_1+b_1=m_1$ (m_1 は 整数)

ゆえに，$a_1=m_1-b_1$(＝整数)

これより，$f(x)$ が 1 次の整数値多項式であるとき

x の係数は整数 …①

次に，$f(x)=a_2x^2+b_2x+c_2$ $(a_2\neq 0)$ とすると

$$\begin{aligned}f(x+1)-f(x)&=a_2(x+1)^2+b_2(x+1)+c_2-(a_2x^2+b_2x+c_2)\\&=2a_2x+a_2+b_2\end{aligned}$$

(1) より，$f(x+1)-f(x)$ は 1 次の整数値多項式であり，① より

$2a_2$ は整数

ゆえに，題意は示された。

(3) 3 次の整数値多項式 $f(x)$ を

$$f(x)=a_3x^3+b_3x^2+c_3x+d_3 \quad (a_3\neq 0)$$

とおく。

$$\begin{aligned}f(x+1)-f(x)=&\,a_3(x+1)^3+b_3(x+1)^2+c_3(x+1)+d_3\\&-(a_3x^3+b_3x^2+c_3x+d_3)\end{aligned}$$

x^3 の項は $a_3x^3-a_3x^3=0$ となり，残らない。

x^2 の項は $a_3\cdot{}_3\mathrm{C}_2\cdot x^2+b_3x^2-b_3x^2=3a_3x^2$

ゆえに，$f(x+1)-f(x)=3a_3x^2+px+q$ という形となり

(1) より，$3a_3x^2+px+q$ は 2 次の整数値多項式である。

これと，(2) の結果から，x^2 の係数の 2 倍である $6a_3$ は整数である。

ゆえに，題意は示された。

(4)　m 次の整数値多項式 $f(x)$ に対して

x^m の係数の m ! 倍が整数である …(*)

ということを m に関する数学的帰納法で示す。

[1]　$m=1$ のとき

示すべき主張は 1 次の整数値多項式 $f(x)$ に対して

x の係数の 1 倍が整数

ということであるが，これは (2) の ① により示されている。

ゆえに，$m=1$ のとき (*) は正しい。

[2]　$m=k$ ($k=1，2，\cdots\cdots$) のとき

k 次の整数値多項式 $f(x)$ に対して

x^k の係数の k ! 倍が整数である …(☆)

であると仮定する。

このとき $k+1$ 次の整数値多項式

$f(x)=a_{k+1}x^{k+1}+b_{k+1}x^k+$(高々$k-1$ 次式)

を考える。

$$f(x+1)-f(x)=a_{k+1}(x+1)^{k+1}+b_{k+1}(x+1)^k+(\text{高々}k-1\text{ 次式})$$
$$-(a_{k+1}x^{k+1}+b_{k+1}x^k+(\text{高々}k-1\text{ 次式}))$$

x^{k+1} の項について： $a_{k+1}x^{k+1}-a_{k+1}x^{k+1}=0$ となり残らない。

x^k の項について

$$a_{k+1}\cdot{}_{k+1}\mathrm{C}_k\,x^k+b_{k+1}\,x^k-b_{k+1}x^k=(k+1)a_k\,x^k$$

ゆえに，$f(x+1)-f(x)=(k+1)a_{k+1}x^k+$(高々$k-1$ 次式)

(1) より，$f(x+1)-f(x)$ は k 次の整数値多項式となり，帰納法の仮定 (☆) より x^k の係数の k ! 倍である

$$k\,!\times(k+1)a_{k+1}\text{ が整数}$$

すなわち，$(k+1)!a_{k+1}$ が整数　ということになる。

これは，$k+1$ 次の整数値多項式 $f(x)$ に対して

x^{k+1} の係数の $(k+1)!$ 倍が整数

ということを意味しており，(*) が $m=k+1$ のときも正しいことを意味する。

以上 [1]，[2] から $m=1，2，\cdots$ に対して (*) は正しい。

ゆえに，題意は示された。

【総括】

$f(x)=a_2x^2+b_2x+c_2$ として

$$\begin{cases} f(-1)=a_2-b_2+c_2=(\text{整数}) \\ f(0)=c_2=(\text{整数}) \\ f(1)=a_2+b_2+c_2=(\text{整数}) \end{cases}$$

として，$f(1)-f(-1)$ を計算することで $2b_2=$(整数) などとしても，この後の手が進みにくいでしょう。

c_2 は整数と言えていますが，a_2 や b_2 が整数である保証はありません。

例題で扱った $f(x)=\dfrac{1}{2}x(x+1)$ という整数値多項式のように

分数係数でも整数値多項式とはなり得る

という部分には注意したいところです。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

3 次であれば，たとえば

$$f(x)=\frac{1}{6}x(x+1)(x+2)$$

などは整数値多項式です。

$n(n+1)(n+2)$ は連続 3 整数の積なので，3!（$=6$）の倍数となり

$$f(n)=\frac{1}{6}\cdot(6\text{ の倍数})=(\text{整数})$$

となるからです。

このような分数係数の整数値多項式はいくらでも作れます。

2022 次式の整数値多項式を作ってほしい？

分かりました。

$${}_n\mathrm{C}_{2022}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-2021)}{2022!}=(\text{整数})$$

よって，

$$f(x)=\frac{1}{2022!}x(x-1)(x-2)\cdots(x-2021)$$

は 2022 次の整数値多項式です。

※ $n=0，1，2，\cdots，2021$ だと ${}_n\mathrm{C}_{2022}$ は定義出来ませんが

$$f(n)=0$$

です。

※※ $n=-1,\ -2,\ \cdots$ では，$n=-m$ (m は自然数) とすれば

$$\begin{aligned} f(n)&=f(-m)\\ &=\frac{1}{2022!}(-m)(-m-1)\cdots(-m-2021)\\ &=\frac{1}{2022!}m\,(m+1)\cdots(m+2021)\\ &={}_{m+2021}\mathrm{C}_{2022} \end{aligned}$$

で整数となります。