(1) 多項式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$（a，b，c は実数）を考える。
$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$ がすべて整数ならば，すべての整数 n に対し，
$f(n)$ は整数であることを示せ。
(2) $f(1996)$，$f(1997)$，$f(1998)$ がすべて整数の場合はどうか。

＜ ’97 名古屋大 ＞

【戦略】

(1) **例題は 2 次式でしたが，今回は 3 次式です。**

だからと言って方向性が変わるわけではなく
係数 a，b，c を代入値 $\alpha(=f(-1))$，$\beta(=f(0))$，$\gamma(=f(1))$ で表すという方針は睨みましょう。

(2) **(1) の結論を活用したければ，$g(x)=f(x+1997)$ と設定したくなるはずです。**

これにより， $\begin{cases} g(-1)=f(1996)=(\text{整数}) \\ g(0)=f(1997)=(\text{整数}) \\ g(1)=f(1998)=(\text{整数}) \end{cases}$ **と，(1) の結果が活用でき**

$$g(n)=(\text{整数})$$

という結果を得ます。

これは，$g(\text{整数})=(\text{整数})$ ということを意味するため，当然
$g(n-1997)$ **も整数**
ということになります。

したがって，$f(n)(=g(n-1997))$ は整数ということになります。

【解答】

(1) $\begin{cases} f(-1)=\alpha \\ f(0)=\beta \\ f(1)=\gamma \end{cases}$ とすると，条件より α，β，γ は整数である。

このとき，$\begin{cases} -1+a-b+c=\alpha \\ c=\beta \\ 1+a+b+c=\gamma \end{cases} \iff \begin{cases} a-b+c=\alpha+1 & \cdots① \\ c=\beta & \cdots② \\ a+b+c=\gamma-1 & \cdots③ \end{cases}$

③−① より $2b=\gamma-\alpha-2$ で，$b=\dfrac{\gamma-\alpha-2}{2}$

①+③ より $2a+2c=\alpha+\gamma$ で，これより

$$\begin{aligned} a&=\frac{\alpha+\gamma-2c}{2} \\ &=\frac{\alpha+\gamma-2\beta}{2} \end{aligned}$$

以上から，$(a,\ b,\ c)=\left(\dfrac{\alpha+\gamma-2\beta}{2},\ \dfrac{\gamma-\alpha-2}{2},\ \beta\right)$

ゆえに，整数 n に対して

$$\begin{aligned} f(n)&=n^3+\frac{\alpha+\gamma-2\beta}{2}n^2+\frac{\gamma-\alpha-2}{2}n+\beta \\ &=n^3+\alpha\left(\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}\right)+\beta(1-n^2)+\gamma\left(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}\right) \\ &=n^3+\frac{\alpha}{2}n(n-1)+\frac{\gamma}{2}n(n+1)+\beta(1-n^2) \end{aligned}$$

n，$n-1$ は連続 2 整数なので，その積である $n(n-1)$ は偶数。

n，$n+1$ は連続 2 整数なので，その積である $n(n+1)$ は偶数。

ゆえに，$f(n)$ は整数となり，題意は示された。

(2) $g(x)=f(x+1997)$ とすると，$\begin{cases} g(-1)=f(1996) \\ g(0)=f(1997) \\ g(1)=f(1998) \end{cases}$ であり，条件から

$g(-1)$，$g(0)$，$g(1)$ は全て整数である。…(☆)

さらに，$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ に対して

$$\begin{aligned} g(x)&=(x+1997)^3+a(x+1997)^2+b(x+1997)+c \\ &=x^3+a'x^2+b'x+c' \quad (a',\ b',\ c' \text{ は実数}) \end{aligned}$$

という形で表せるため，(☆)，及び (1) の結果から，

任意の整数 n に対して $g(n)$ は整数である。

したがって，$f(n)=g(n-1997)$ も整数となる。

【総括】

(2) の主張は $f(1996)$, $f(1997)$, $f(1998)$ である必要はないことは分かるでしょう。

実数 a , b , c に対して , 3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ を考える。このとき , 次の問に答えよ。

(1) $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ が整数であるならば , すべての整数 n に対して , $f(n)$ は整数であることを示せ。

(2) $f(2010)$, $f(2011)$, $f(2012)$ が整数であるならば , すべての整数 n に対して , $f(n)$ は整数であることを示せ。

< '11 新潟大 >