次の問いに答えよ。

(1) $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{2}$ とすると，すべての整数 n に対して $f(n)$ は整数となることを示せ。

(2) a，b，c を実数の定数とし，$g(x)=ax^2+bx+c$ とする。
$g(-1)$，$g(0)$，$g(1)$ が整数ならば，すべての整数 n に対して $g(n)$ は整数となることを示せ。

(3) 次の命題の真偽を述べよ。ただし，結論だけでなく，理由も述べること。
$h(x)$ が 2 次の多項式であり，$h(-1)$，$h(0)$，$h(2)$ が整数ならば，すべての整数 n に対して $h(n)$ は整数である。

＜ ’13 中央大 ＞

【戦略】

(1) **$f(n)=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ を見て，**

$n(n+1)$ は連続 2 整数の積だから $\dfrac{1}{2}\cdot$(偶数) だな

と即座に看破したいところです。

(2) **発想の素としては**

何も条件をもっていない a，b，c に対して，整数という条件をもっている $g(-1)$，$g(0)$，$g(1)$ を主体に $g(x)$ を表そう

という気持ちをもちます。

目に優しく $\begin{cases} g(-1)=\alpha \\ g(0)=\beta \\ g(1)=\gamma \end{cases}$ **とおき，$g(x)$ を α，b，γ で表そうという気持ちです。**

(3) **基本的にはまずは疑います。(1) を眺めて**

$\dfrac{1}{2}\cdot$(偶数) だから上手くいってるけど $\dfrac{1}{3}\times(\ \ )$ という形だと上手くいく保証あるか？

と思えるとしめたもので，$h(x)=\dfrac{1}{3}x(x+1)$ というような反例が見つかると思います。

【解答】

(1) 整数 n に対して，$f(n)=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

n，$n+1$ は連続 2 整数なので，その積である $n(n+1)$ は偶数。

ゆえに，$f(n)=\dfrac{1}{2}\cdot$(偶数)$=$(整数) となり，題意は示された。

(2) $\begin{cases} g(-1)=\alpha \\ g(0)=\beta \\ g(1)=\gamma \end{cases}$ とすると，条件より α，β，γ は整数である。

このとき，$\begin{cases} a-b+c=\alpha \\ c=\beta \\ a+b+c=\gamma \end{cases}$

これを a，b，c の連立方程式と見なして，a，b，c について解くと

$$(a,\ b,\ c)=\left(\frac{\alpha+\gamma-2\beta}{2},\ \frac{\gamma-\alpha}{2},\ \beta\right)$$

このとき，$g(x)=\dfrac{\alpha+\gamma-2\beta}{2}x^2+\dfrac{\gamma-\alpha}{2}x+\beta$

整数 n に対して，

$$\begin{aligned} g(n)&=\frac{\alpha+\gamma-2\beta}{2}n^2+\frac{\gamma-\alpha}{2}n+\beta \\ &=\alpha\left(\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}\right)+\beta(1-n^2)+\gamma\left(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}\right) \\ &=\frac{\alpha}{2}n(n-1)+\frac{\gamma}{2}n(n+1)+\beta(1-n^2) \end{aligned}$$

n，$n-1$ は連続 2 整数なので，その積である $n(n-1)$ は偶数。

n，$n+1$ は連続 2 整数なので，その積である $n(n+1)$ は偶数。

ゆえに，$g(n)$ は整数となり，題意は示された。

(3) 与えられた命題は「偽」である。

＜反例＞： $h(x)=\dfrac{1}{3}x(x+1)$

$h(-1)=0$，$h(0)=0$，$h(2)=2$ であり，$h(-1)$，$h(0)$，$h(2)$ は全て整数であるが，

$$h(1)=\frac{2}{3}$$

であり，全ての整数 n に対して $h(n)$ が整数とはならない。

© MathClinic

【総括】

⑵ は有名事実と言ってもよいぐらい手垢がついている話題です。

係数 a，b，c を代入値 $\alpha\,(=g(-1))$，$\beta\,(=g(0))$，$\gamma\,(=g(1))$ で表す

という方向性をスムーズに見出せるかについては正直経験によるところが大きいでしょう。

この係数を代入値で表すという方向性は，いわゆる「補間多項式」と呼ばれる概念とリンクしています。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

$f(x)=ax^2+bx+c$ という 2 次式に対して

$$f(-1)=\alpha,\ f(0)=\beta,\ f(1)=\gamma$$

とします。

$y=f(x)$ というグラフが $(-1,\ \alpha)$，$(0,\ \beta)$，$(1,\ \gamma)$ を通ることを意味します。

$(-1,\ \alpha)$，$(0,\ \beta)$，$(1,\ \gamma)$ を通る 2 次関数として

$$y=\alpha\cdot\frac{x(x-1)}{(-1-0)\cdot(-1-1)}+\beta\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)\cdot(0-1)}+\gamma\cdot\frac{x(x+1)}{(1+0)\cdot(1+1)}$$

とい設定できます。

（うまいこと 0 になったり約分されたりしていることを実感してください）

この方法を「ラグランジュの補間法」と言い，代入値 α，β，γ を用いて表した多項式を補間多項式と言います。

© MathClinic