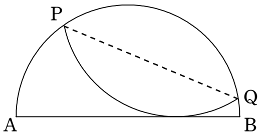
　ABを直径とする半径が1の半円がある。円周上の弧PQを弦PQで折り返したとき，折り返された弧がABに接したとする。
　このような弦PQの存在する範囲を求めて図示せよ。



< '92 千葉大 >

【戦略】

幾何的に通過領域を目で追うことは難しいため，座標を設定するのが第一感でしょう。

A$(-1,0)$，B$(1,0)$ **とし，接点を** T$(t,0)$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ **と設定します。**

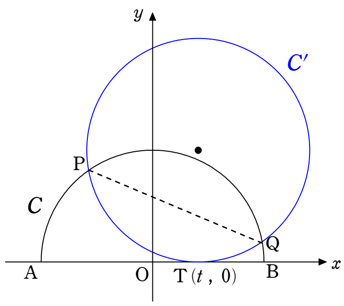
目標は折り目PQを与える方程式をGetすることです。

そこで，折り返した一部の弧について

全体の円を復元する

ことを考えます。

つまり，元の円を C，**復元した円を** C' **としたとき**



という構図で考えて，折り目PQを C，C' **の交点を通る直線ととらえるわけです。**

そして，最大のポイントは C' **は折り返しただけであり，元々**

C **の体の一部**

であったわけです。

つまり， C **の半径と** C' **の半径は等しいことになり，** C' **の半径も1ということになります。**

C' **は** x **軸に接する円であることから中心** $(t,1)$，**半径1の円ということになり**

$$\begin{cases} \text{円 } C : x^2+y^2=1 \iff x^2+y^2-1=0 \cdots ① \\ \text{円 } C' : (x-t)^2+(y-1)^2=1 \iff x^2+y^2-2tx-2y+t^2=0 \cdots ② \end{cases}$$

と立式できるわけです。

C，C' **の交点P，Qを通る直線の式を出すために，P，Qそのものを出すのは筋が悪すぎます。**

①$-$② **で得られる** $2tx+2y-t^2-1=0$ **こそが直線PQです。**

（**解答ではもう少し丁寧に記述します**）

あとは， $-1 \leqq t \leqq 1$ **で** t **が動くときの線分** $2tx+2y-t^2-1=0$ **の通過領域を考えることになります。**

厄介なのは直線の通過領域ではなく，"線分" の通過領域ということです。

そこで，まずは一旦直線の通過領域を求めて，そのうち

$$x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0$$

という半円内にある部分

としてとらえるのが得策です。

直線の通過領域に関しては，色々ありますが逆像法で仕留めます。

つまり，題意の通過領域を D **としたとき**

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ **って** D **に入ってる？**

$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right)$ **って** D **に入ってる？**

というように，しらみつぶしに調べる感覚で

(X, Y) **って** D **に入ってる？入ってるとしたらどんな** (X, Y) **？**

と考えていきます。

(X, Y) **って** D **に入ってるかどうかは**

$$2tX+2Y-t^2-1=0$$

と代入したときに， t **を** $-1 \leqq t \leqq 1$ **の範囲でうまく仕組めるかどうかということにかかってきます。**

すなわち， $t^2-2Xt-2Y+1=0$ **という** t **の2次方程式が** $-1 \leqq t \leqq 1$ **に少なくとも1つ実数解をもつかどうかを調べることになります。**

厄介な「少なくとも1つ型」の解の配置問題ですが，

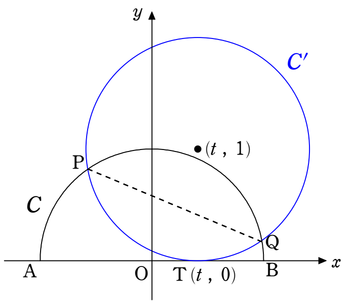
[1]　$t=1$ **を解にもつ**
[2]　$t=-1$ **を解にもつ**
[3]　**2解のうち一方が** $-1<t<1$，**他方が** $t<-1$，$1<t$ **の範囲にある**
[4]　**重解を含む2解とも** $-1<t<1$ **の範囲にある**

とオーソドックスに場合分けをして捌いていきます。

【解答】

線分 AB を直径とする半径 1 の半円を C とし，折り返された弧を含むように復元した円を C' とする。

このとき，O を原点として A $(-1\,,\,0)$，B $(1\,,\,0)$ と座標を定め，題意の接点を T $(t\,,\,0)$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ と定める。



(図 1)

C，C' の半径は等しいため，C' の中心は $(t\,,\,1)$

よって，

$$\begin{cases} \text{円 } C : x^2+y^2=1 \iff x^2+y^2-1=0 \cdots ① \\ \text{円 } C' : (x-t)^2+(y-1)^2=1 \iff x^2+y^2-2tx-2y+t^2=0 \cdots ② \end{cases}$$

①−② によって得られる

$$2tx+2y-t^2-1=0$$

という方程式で与えられる直線上の点 $(x\,,\,y)$ は，①，② をともに満たす。

これは直線 PQ の式が $2tx+2y-t^2-1=0$ であることを意味する。

ゆえに，$-1 \leqq t \leqq 1$ で t が動いたときの線分 $2tx+2y-t^2-1=0$ の通過領域を求めて図示すればよい。

求める通過領域を D とする。

$(X\,,\,Y)$ が D 上

$$\iff \begin{cases} 2tX+2Y-t^2-1=0 \text{ を満たす } t \text{ が } -1 \leqq t \leqq 1 \text{ に少なくとも 1 つ存在する} \\ X^2+Y^2 \leqq 1 \cdots (☆) \\ Y \geqq 0 \cdots (★) \end{cases}$$

$t^2-2Xt-2Y+1=0$ を満たす t が $-1 \leqq t \leqq 1$ に少なくとも 1 つ存在するための条件について考える。

$$f(t)=t^2-2Xt-2Y+1 \ (\ =(t-X)^2-X^2-2Y+1\ )$$

とおく。

[1]　$f(1)=0$ のとき

$$1-2X-2Y+1=0 \iff Y=-X+1$$

[2]　$f(-1)=0$ のとき

$$1+2X-2Y+1=0 \iff Y=X+1$$

[3]　$f(t)=0$ の解のうち $\begin{cases} \text{一方が } -1<t<1 \\ \text{他方が } t<-1,\ 1<t \end{cases}$ の範囲にあるとき

$f(1)\cdot f(-1)<0$ となればよい。

$(2-2X-2Y)(2+2X-2Y)<0$，すなわち

$$(Y+X-1)(Y-X-1)<0$$

$$\begin{cases} Y+X-1>0 \\ Y-X-1<0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} Y+X-1<0 \\ Y-X-1>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y>-X+1 \\ Y<X+1 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} Y<-X+1 \\ Y>X+1 \end{cases}$$

[4]　$f(t)=0$ の重解を含む 2 つの解が $-1<t<1$ の範囲に存在するとき

軸について：$-1<X<1$

頂点について：$-X^2-2Y+1<0 \iff Y>-\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{2}$

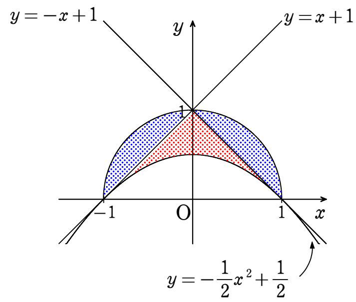
$f(1)>0 \iff 2-2X-2Y>0 \iff Y<-X+1$

$f(-1)>0 \iff 2+2X-2Y>0 \iff Y<X+1$

求める通過領域 D は

「[1] または [2] または [3] または [4]」かつ (☆) かつ (★)

を満たす領域であり，以下の (図 2) のようになる。(境界線を含む)



(図 2)

【総括】

円を折り返したときの折り目の存在範囲というシンプルな問いかけですが，完答するためには

・折り返した弧の復元円は，元の円の半径と同じ
・２円の交点を通る 2 直線の立式
・線分の通過領域
・解の配置 (少なくとも 1 つ解をもつタイプ) の処理

と，次から次へと襲い掛かってくる上級テーマを跳ねのける強靭な基礎力が必要です。

なお，最後の解の配置の処理についてはもう少し簡潔にまとめることもできますが，同値性などを含む細やかな記述が必要であるため，【解答】では泥臭いが再現可能性の高い記述としておきました。

また，包絡線に習熟していると，今回の直線 $y=-tx+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}$ について $g(x)=-tx+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}\left(\ =\frac{1}{2}(t-x)^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)$ とおくと $g(x)-\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(t-x)^2$ という式が得られるため

$\begin{cases} y=g(x) \\ y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2} \end{cases}$ を連立したときの 2 次方程式が重解 $x=t$ をもつ

ということになり，

放物線 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ の $\left(t\,,\,\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}\right)$ における接線が $y=g(x)$

と，目で追いやすくなります。