自然数 n に対して

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n\}$$

とおく。

(1) a_n は整数であることを示せ。

(2) $\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n\pi\right)$ を求めよ。

＜ '95 埼玉大 ＞

【戦略】

(1) **$1+\sqrt{2}$ や $1-\sqrt{2}$ は目がチカチカするため，$\begin{cases}\alpha=1+\sqrt{2}\\ \beta=1-\sqrt{2}\end{cases}$ と置きなおすことにより，$a_n=\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^n-\beta^n)$ とスッキリさせます。**

証明の方向性としての第一感は数学的帰納法ですが，一般項よりも漸化式の方が帰納法における使い勝手はいいため，漸化式の作成を目論みます。

手慣れている人は a_{n+2} を計算しようという気になりますが，

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(\alpha^n-\beta^n)(\alpha+\beta)-\alpha\beta(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})\}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2}a_n+\sqrt{2}a_{n-1})\\&=2a_n+a_{n-1}\end{aligned}$$

という漸化式を立てて，「番号を上げよう」と気づくことができれば番号を上げるという微調整をすることで事足ります。

(2) **今回のターゲットに含まれる $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n\pi$ は**

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^n$$

に入っており，これを活用するため，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n\pi=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^n\pi+a_n\pi$$

と見れば

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n\pi\right)=\sin\left\{\frac{\pi}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^n+a_n\pi\right\}$$

となり，(1) から $\sin\left\{\frac{\pi}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^n+(\text{整数})\pi\right\}$ となります。

三角関数においては $\sin\{\theta+(\text{偶数})\pi\}=\sin\theta$ というように (偶数)π は無視出来ます。

そういった視点で，a_n を観察してみると，a_n はただの整数でなく偶数ということも看破できるでしょう。

ここから，$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n\pi\right)=\sin\left\{\frac{\pi}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^n\right\}\to\sin 0=0$

となり，解決です。

なお，(1) の段階から a_n が偶数であることを示しておきます。

【解答】

(1) $\begin{cases}\alpha=1+\sqrt{2}\\ \beta=1-\sqrt{2}\end{cases}$ とおくと，$\sqrt{2}a_n=\alpha^n-\beta^n$ …①

また，$\begin{cases}\alpha+\beta=2\\ \alpha\beta=-1\end{cases}$ …②

$$\begin{aligned}a_{n+2}&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^{n+2}-\beta^{n+2})\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})(\alpha+\beta)-\alpha^{n+1}\beta+\alpha\beta^{n+1}\}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})(\alpha+\beta)-\alpha\beta(\alpha^n-\beta^n)\}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2}a_{n+1}+\sqrt{2}a_n)\quad(\because ①,②)\\&=2a_{n+1}+a_n\end{aligned}$$

a_n が偶数 …(*) であることを n についての数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき　$a_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(1+\sqrt{2})^1-(1-\sqrt{2})^1\}=2$

よって $n=1$ のとき (*) は正しい。

[2] $n=2$ のとき　$a_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(1+\sqrt{2})^2-(1-\sqrt{2})^2\}=4$

よって $n=2$ のとき (*) は正しい。

[3] $n=k$，$k+1$ $(k=1,2,\cdots)$のとき a_k，a_{k+1} が偶数と仮定する。

このとき，$a_{k+2}=2a_{k+1}+a_k$ で仮定より，a_{k+2} も偶数。

よって，$n=k+2$ のときも (*) は正しい。

以上，[1]，[2]，[3] から，$n=1,2,\cdots$ に対して a_n は偶数である。

よって，a_n は $n=1,2,\cdots$ に対して整数である。

(2) $a_n=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^n$ であり

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^n+a_n$$

よって，

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n\pi\right)&=\sin\left\{\frac{\pi}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^n+a_n\pi\right\}\\&=\sin\left\{\frac{\pi}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^n\right\}\quad(\because (*)\text{ より } a_n \text{ は偶数})\end{aligned}$$

$|1-\sqrt{2}|<1$ であるため，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^n\right)=0$

$\sin x$ は連続関数であるため，$\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n\pi\right)=0$ …答

【総括】

ノーヒントで $\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n\pi\right)$ が訊かれた場合，アタフタするでしょう。

$\lim_{x\to\infty}\sin x$ は通常収束しないため，今回の極限が収束するのは感覚的には不思議な感じがします。