直角三角形の外側に作る二等辺三角形による正三角形

直角三角形 ABC（$\angle A=90^\circ$）があり，これと同一平面上で △ABC の外側に，辺 BC，CA，AB をそれぞれ底辺とする頂角 120° の二等辺三角形 PBC，QCA，RAB をつくる。

このとき，△PQR が正三角形になることを示せ。

＜ ’86 福井大 改 ＞

【戦略 1】

ひとまず，$AB=c$，$BC=a$，$CA=b$，$\begin{cases} PB=PC=p \\ QC=QA=q \\ RA=RB=r \end{cases}$ **と長さを設定します。**

a，b，c **と** p，q，r **の間には** $\begin{cases} a=2p\sin 60^\circ=\sqrt{3}\,p \\ b=2q\sin 60^\circ=\sqrt{3}\,q \\ c=2r\sin 60^\circ=\sqrt{3}\,r \end{cases}$ **という関係式が成り立ちます。**

この関係式がどこかで効いてくることを身構えつつ △PQR の 3 辺

PQ，QR，RP

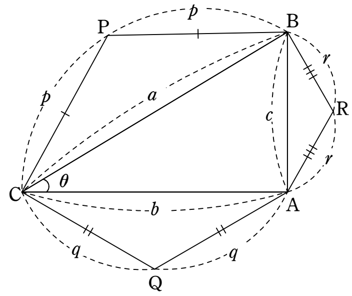
の長さに迫っていきます。

例えば，PQ の長さに迫りたければ，PQ を含む △PCQ という三角形に注目し，余弦定理を考えたいところです。

加法定理，及び直角三角形の定義に注意しつつ計算を進めていきましょう。

QR については △AQR，RP については △BRP で余弦定理を用いて同様に計算していきます。

【解 1】



$AB=c$，$BC=a$，$CA=b$ とし

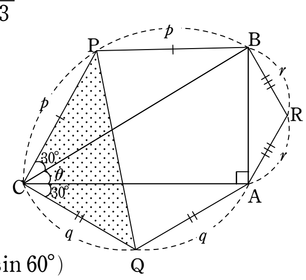
$$\begin{cases} PB=PC=p \\ QC=QA=q \\ RA=RB=r \end{cases}$$

とする。

△PBC，△QCA，△RAB は

頂角が 120° の二等辺三角形なので

$$\begin{cases} a=2p\sin 60^\circ=\sqrt{3}\,p \\ b=2q\sin 60^\circ=\sqrt{3}\,q \\ c=2r\sin 60^\circ=\sqrt{3}\,r \end{cases} \text{であり，} \begin{cases} p=\dfrac{a}{\sqrt{3}} \\ q=\dfrac{b}{\sqrt{3}} \quad \cdots ① \\ r=\dfrac{c}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

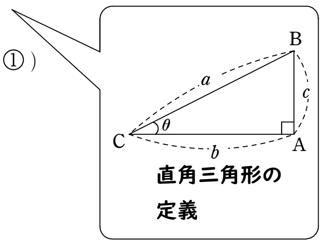


したがって，$\angle ACB=\theta$ とすると，

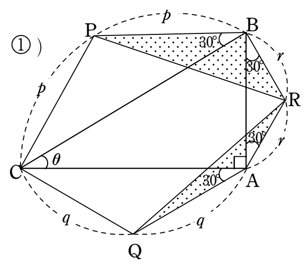
$\angle PCQ=\theta+60^\circ$

△PCQ で余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} PQ^2&=p^2+q^2-2pq\cos(\theta+60^\circ) \\ &=p^2+q^2-2pq(\cos\theta\cos 60^\circ-\sin\theta\sin 60^\circ) \\ &=p^2+q^2-2pq\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{2}-\frac{c}{a}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &=\frac{a^2}{3}+\frac{b^2}{3}-\frac{2ab}{3}\left(\frac{b-\sqrt{3}c}{2a}\right)\ (\because ①) \\ &=\frac{a^2}{3}+\frac{b^2}{3}-\frac{b(b-\sqrt{3}c)}{3} \\ &=\frac{1}{3}(a^2+\sqrt{3}bc) \end{aligned}$$



△AQR で余弦定理を用いると



$$\begin{aligned} QR^2&=q^2+r^2-2qr\cos 150^\circ \\ &=\frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{3}-2\cdot\frac{b}{\sqrt{3}}\cdot\frac{c}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ (\because ①) \\ &=\frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{3}+\frac{\sqrt{3}\,bc}{3} \\ &=\frac{1}{3}(b^2+c^2+\sqrt{3}bc) \\ &=\frac{1}{3}(a^2+\sqrt{3}bc)\ (\because \text{三平方の定理}) \end{aligned}$$

△BRP で余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} RP^2&=r^2+p^2-2rp\cos\{(90^\circ-\theta)+60^\circ\} \\ &=r^2+p^2-2rp\cos(150^\circ-\theta) \\ &=r^2+p^2-2rp(\cos 150^\circ\cos\theta+\sin 150^\circ\sin\theta) \\ &=r^2+p^2-2rp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{b}{a}+\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{a}\right) \\ &=\frac{c^2}{3}+\frac{a^2}{3}-2\cdot\frac{c}{\sqrt{3}}\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{-\sqrt{3}b+c}{2a} \\ &=\frac{c^2}{3}+\frac{a^2}{3}+\frac{c(\sqrt{3}b-c)}{3} \\ &=\frac{1}{3}(a^2+\sqrt{3}bc) \end{aligned}$$

以上から，$PQ^2=QR^2=RP^2$ であり，PQ，QR，RP は正の値ゆえ

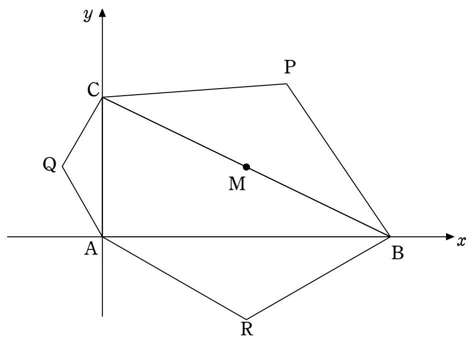
$$PQ=QR=RP$$

よって，△PQR は正三角形である。

【戦略 2】

直角を活かして座標を導入するのも一つの手です。

【解 2】



A を原点，B$(b\,,\,0)$，C$(0\,,\,c)$ $(b>0\,,\,c>0)$ と設定する。

線分 BC の中点を M とすると，M$\left(\dfrac{b}{2}\,,\,\dfrac{c}{2}\right)$

直線 BC の方程式は，$\dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{c}=1$ より，直線 BC の法線ベクトルを

切片が分かっているなら
この形で一発で出しましょう

$\vec{n}$ とすると，$\vec{n}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{b}\\[2mm] \dfrac{1}{c}\end{pmatrix}$ と表せる。

方向 Get

$\vec{n}$ 方向の単位ベクトル $\overrightarrow{n_e}$ は

$$\overrightarrow{n_e}=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2}}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{b}\\[2mm] \dfrac{1}{c}\end{pmatrix}=\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{b}\\[2mm] \dfrac{1}{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}\\[2mm] \dfrac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}\end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{MP}}|=\frac{1}{\sqrt{3}}|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2}$$

大きさ Get

よって，$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{2\sqrt{3}}\,\overrightarrow{n_e}=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{3}\,c}{6}\\[2mm] \dfrac{\sqrt{3}\,b}{6}\end{pmatrix}$

したがって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{MP}}\\&=\begin{pmatrix}\dfrac{b}{2}\\[2mm] \dfrac{c}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{3}\,c}{6}\\[2mm] \dfrac{\sqrt{3}\,b}{6}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\dfrac{3b+\sqrt{3}\,c}{6}\\[2mm] \dfrac{3c+\sqrt{3}\,b}{6}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，P$\left(\dfrac{3b+\sqrt{3}\,c}{6}\,,\,\dfrac{3c+\sqrt{3}\,b}{6}\right)$

また，Q$\left(-\dfrac{c}{2\sqrt{3}}\,,\,\dfrac{c}{2}\right)$，R$\left(\dfrac{b}{2}\,,\,-\dfrac{b}{2\sqrt{3}}\right)$ すなわち，

$$\mathrm{Q}\left(-\frac{\sqrt{3}\,c}{6}\,,\,\frac{c}{2}\right),\ \mathrm{R}\left(\frac{b}{2}\,,\,-\frac{\sqrt{3}\,b}{6}\right)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=\left\{\frac{3b+\sqrt{3}\,c}{6}-\left(-\frac{\sqrt{3}\,c}{6}\right)\right\}^2+\left\{\frac{3c+\sqrt{3}\,b}{6}-\frac{c}{2}\right\}^2\\&=\left(\frac{3b+2\sqrt{3}\,c}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}\,b}{6}\right)^2\\&=\frac{12b^2+12c^2+12\sqrt{3}\,bc}{36}\\&=\frac{b^2+c^2+\sqrt{3}\,bc}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}^2&=\left\{\frac{b}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}\,c}{6}\right)\right\}^2+\left\{-\frac{\sqrt{3}\,b}{6}-\frac{c}{2}\right\}^2\\&=\left(\frac{3b+\sqrt{3}\,c}{6}\right)^2+\left(\frac{-\sqrt{3}\,b-3c}{6}\right)^2\\&=\frac{12b^2+12c^2+12\sqrt{3}\,bc}{36}\\&=\frac{b^2+c^2+\sqrt{3}\,bc}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{RP}^2&=\left\{\frac{3b+\sqrt{3}\,c}{6}-\frac{b}{2}\right\}^2+\left\{\frac{3c+\sqrt{3}\,b}{6}-\left(-\frac{\sqrt{3}\,b}{6}\right)\right\}^2\\&=\left(\frac{\sqrt{3}\,c}{6}\right)^2+\left(\frac{3c+2\sqrt{3}\,b}{6}\right)^2\\&=\frac{12b^2+12c^2+12\sqrt{3}\,bc}{36}\\&=\frac{b^2+c^2+\sqrt{3}\,bc}{3}\end{aligned}$$

以上から，$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{QR}^2=\mathrm{RP}^2$ であり，PQ，QR，RP は正の値ゆえ

$$\mathrm{PQ}=\mathrm{QR}=\mathrm{RP}$$

よって，△PQR は正三角形である。

【戦略 3】

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{pmatrix}0\\c\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b\\c\end{pmatrix}$ **なので，これに垂直な方向のベクトル** $\vec{n}$ **として**

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}c\\b\end{pmatrix}$$

として計算してもよいでしょう。

【解 3】【解 2】の部分的別解

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{pmatrix}-b\\c\end{pmatrix}$ であることから，直線 BC の法線ベクトル $\vec{n}$ として

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}c\\b\end{pmatrix}$$

がある。

$\vec{n}$ 方向の単位ベクトル $\overrightarrow{n_e}$ は

$$\overrightarrow{n_e}=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}\begin{pmatrix}c\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}\\[2mm] \dfrac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}\end{pmatrix}$$

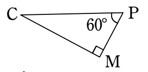
（以下【解 2】と同様）

【総括】

【解 1】が自然だと思いますが，a，b，c，p，q，r を導入し，これらの関係式を自分で見出して進めるタフさは必要で，そのあたりのタフさは持っててほしいところです。

【解 2】の座標設定は Q , R の座標については実質困らないでしょう。

問題は P の座標ですが，ベクトルを繋いで $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を出すことで P の座標に辿り着くというビジョンはもちたいところです。

120° という条件の使い方については 

と見て，
$\left|\overrightarrow{\mathrm{MP}}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left|\overrightarrow{\mathrm{CM}}\right|$ という形で捌きました。

$ax+by+c=0$ という直線の法線ベクトルが $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ というのは常識にしておきましょう。

$ax+by+c=0$ 上の任意の 2 点 $(p\,,\ q)$，$(s\,,\ t)$ について

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} s-p \\ t-q \end{pmatrix}&=a\,(s-p)+b\,(t-q)\\&=as+bt-(ap+bq)\\&=-c-(-c)\\&=0\end{aligned}$$