２つの関数を

$$\begin{cases} f(x)=8x^2+16x-k \\ g(x)=2x^3+5x^2+4x \end{cases}$$

とする。ただし，k は実数とする。

(1)　$-3 \leqq x \leqq 3$ の範囲の任意の x に対して，常に $f(x) \leqq g(x)$ となるための k の値の範囲を求めよ。

(2)　$-3 \leqq x_1 \leqq 3$，$-3 \leqq x_2 \leqq 3$ の範囲の任意の x_1，x_2 に対して，常に $f(x_1) \leqq g(x_2)$ となるための k の値の範囲を求めよ。

＜ ’00 西南学院大 ＞

【戦略】

戦略自体は例題と同様のため，割愛します。

【解答】

(1)　$f(x) \leqq g(x) \iff 8x^2+16x-k \leqq 2x^3+5x^2+4x$

$\iff 2x^3-3x^2-12x+k \geqq 0$

$h(x)=2x^3-3x^2-12x+k$ とおき，$-3 \leqq x \leqq 3$ における $h(x)$ の最小値が 0 以上となるような a の範囲を求めればよい。

$$\begin{aligned} h'(x)&=6x^2-6x-12 \\ &=6(x+1)(x-2) \end{aligned}$$

$-3 \leqq x \leqq 3$ における $h(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$-3 \leqq x \leqq 3$ における $h(x)$ の増減の仕方から最小値は

$$h(-3) \text{ または } h(2)$$

であるが，

$$\begin{cases} h(-3)=k-45 \\ h(2)=k-20 \end{cases} \text{ であり，} h(-3)<h(2)$$

ゆえに，$-3 \leqq x \leqq 3$ における $h(x)$ の最小値は $h(-3)=k-45$

題意を満たす条件は $k-45 \geqq 0$，すなわち $k \geqq 45$ …答

(2)　$\begin{cases} -3 \leqq x \leqq 3 \text{ における } f(x) \text{ の最大値を } M \\ -3 \leqq x \leqq 3 \text{ における } g(x) \text{ の最小値を } m \end{cases}$ とする。

このとき，$-3 \leqq x_1 \leqq 3$，$-3 \leqq x_2 \leqq 3$ を満たす任意の x_1，x_2 に対して

$$\begin{cases} f(x_1) \leqq M \\ g(x_2) \geqq m \end{cases}$$

が成り立つ。

ゆえに，$m \geqq M$ となれば，$f(x_1) \leqq M \leqq m \leqq g(x_2)$ となり，題意を満たす。

以下，m，M をそれぞれ求める。

$$\begin{aligned} g'(x)&=6x^2+10x+4 \\ &=2(3x+2)(x+1) \end{aligned}$$

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-21	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{28}{27}$	$\nearrow$	111

よって増減表から

$$m=g(-3)=-21$$

一方

$$f(x)=8(x+1)^2-k-8$$

$-3 \leqq x \leqq 3$ の範囲では $M=f(3)=120-k$

$m \geqq M$ となるの範囲は $-21 \geqq 120-k$

すなわち $k \geqq 141$ …答

【総括】

ここまでくると分かると思いますが，絶対不等式の問題は

一皮むけば最大・最小問題

ということが言えます。