t を実数として，2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x)=x^3-3x^2-9x$$
$$g(x)=-9x^2+27x+t$$

とする。次の問に答えよ。

(1) $x\geqq 0$ を満たす任意の x に対して $f(x)\geqq g(x)$ となる t の範囲を求めよ。

(2) $x_1\geqq 0$，$x_2\geqq 0$ を満たす任意の x_1，x_2 に対して $f(x_1)\geqq g(x_2)$ となる t の範囲を求めよ。

＜ '05 東京理科大 ＞

【戦略】

(1) **言葉は悪いですが，馬鹿正直に $f(x)\geqq g(x)$ のまま考えるのは頭が硬いと言わざるを得ません。**

$x^3-3x^2-9x\geqq -9x^2+27x+t$ **という不等式を組み替えて**

$$x^3+6x^2-36x-t\geqq 0$$

が $x\geqq 0$ を満たす任意の x について成り立つ条件を考えます。

これについては $h(x)=x^3+6x^2-36x-t$ とおき，$x\geqq 0$ における最小値が 0 以上となればよいと捉えます。

(2) **今度は代入するものが f と g で異なるため，移項する方が不自然です。**

題意はどんなペアでぶち込んでも f が勝つということなので

$$(f\text{ の最小値})\geqq(g\text{ の最大値})$$

と捉えればよいわけです。

【解答】

(1) $f(x)\geqq g(x) \iff x^3-3x^2-9x\geqq -9x^2+27x+t$
$\iff x^3+6x^2-36x-t\geqq 0$

$h(x)=x^3+6x^2-36x-t$ とおき，$x\geqq 0$ における $h(x)$ の最小値が 0 以上となるような t の範囲を求めればよい。

$$\begin{aligned}h'(x)&=3x^2+12x-36\\&=3(x^2+4x-12)\\&=3(x+6)(x-2)\end{aligned}$$

$x\geqq 0$ における $h(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$	0	$\searrow$	$-40-t$	$\nearrow$

よって，$x\geqq 0$ における $h(x)$ の最小値は $h(2)=-40-t$

題意を満たす条件は $-40-t\geqq 0$，すなわち $t\leqq -40$ …答

(2) $\begin{cases}x\geqq 0\text{ における } f(x)\text{ の最小値を } m\\ x\geqq 0\text{ における } g(x)\text{ の最大値を } M\end{cases}$ とする。

このとき，$x_1\geqq 0$，$x_2\geqq 0$ を満たす任意の x_1，x_2 に対して

$$\begin{cases}f(x_1)\geqq m\\ g(x_2)\leqq M\end{cases}$$

が成り立つ。

ゆえに，$m\geqq M$ となれば，$f(x_1)\geqq m\geqq M\geqq g(x_2)$ となり，題意を満たす。

以下，m，M をそれぞれ求める。

$$\begin{aligned}f'(x)&=3x^2-6x-9\\&=3(x^2-2x-3)\\&=3(x+1)(x-3)\end{aligned}$$

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$	0	$\searrow$	-27	$\nearrow$

ゆえに，$m=-27$

一方，$g(x)=-9x^2+27x+t$
$=-9\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+t+\dfrac{81}{4}$

$x\geqq 0$ の範囲では，$M=g\left(\dfrac{3}{2}\right)=t+\dfrac{81}{4}$

$m\geqq M$ となる t の範囲は $-27\geqq t+\dfrac{81}{4}$，すなわち $t\leqq -\dfrac{189}{4}$ …答

【総括】

(1) は

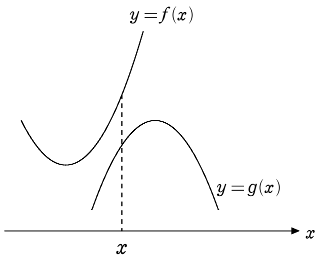
一番雑魚が 0 以上ならその他の連中はみんな 0 以上だろ

という戦国武将理論です。

(2) は (1) とのニュアンスの違いを感じる必要があります。

説明を簡単にするために，以下では $x \geqq 0$ という制限は無視します。

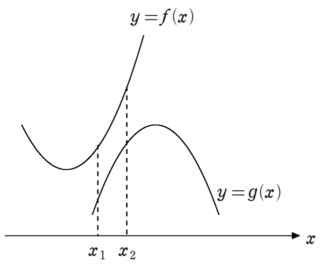
(1) の $f(x) \geqq g(x)$ とは



(図 1)

というように，x を 1 つ決めたときに，$f(x) \geqq g(x)$ となっていればよいわけです。

ただ，(図 1) のような状態だと，任意の x_1，x_2 に対して，$f(x_1) \geqq g(x_2)$ というわけにはいきません。



というように，$f(x_1)$ の値を超え得る $g(x_2)$ の存在を許してはならないからです。

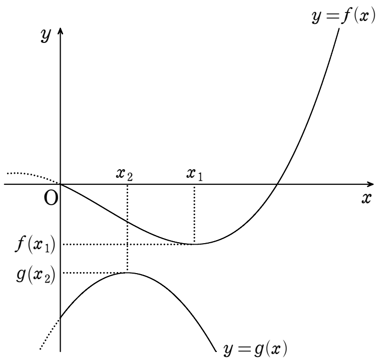
任意の x_1，x_2 に対して $f(x_1) \geqq g(x_2)$ とは，一言で言うならば，

f の完全勝利

というニュアンスです。

f 側の一番雑魚であったとしても，g の最強に勝てる

ということであり，グラフ的には



のようになります。

今回の話題は絶対不等式と呼ばれる定番の話題です。

(1) の基本的な処理はもちろん，(2) の独立 2 変数についての絶対不等式についてもしっかりと対応しましょう。