曲線 $y=f(x)=x(4-x)$ 上に 4 点

$\mathrm{O}(0,0)$，$\mathrm{A}(a,f(a))$，$\mathrm{B}(b,f(b))$，$C(3,3)$　$(0<a<b<3)$

をとる。

(1) 四角形 OABC の面積が最大となるときの a，b の値を求めよ。

(2) 角 OAC の大きさが最小になるときの a の値を求めよ。

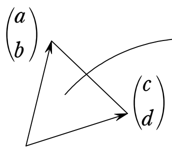
＜ '04 大分大 ＞

【戦略 1】

(1) **例題と違い，四角形の辺はすべて斜めです。**

素直に △OAB＋△OBC と分割して面積を立式します。

これらの面積については，成分表示されたベクトルの面積公式



面積： $\dfrac{1}{2}|ad-bc|$

を用いながら立式していきます。

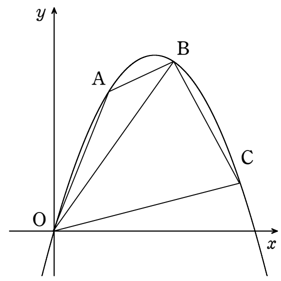
四角形の面積 S が a，b の独立 2 変数関数として表されますから，手なりに予選決勝法で仕留めます。

(2) **座標平面上での角度の扱いですから，ベクトルの内積を用いて処理します。**

ただし，少々式がゴツくなりますので，目に優しく置き換えを駆使して，目と脳への負担を軽減させることを考えましょう。

【解 1】

(1) 四角形 OABC の面積を S とする。



$$
\begin{aligned}
S&=\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OBC}\\
&=\frac{1}{2}|ab(4-b)-ab(4-a)|+\frac{1}{2}|3b-3b(4-b)|\\
&=\frac{1}{2}|ab\{(4-b)-(4-a)\}|+\frac{1}{2}|3b(1-(4-b))|\\
&=\frac{1}{2}|ab(a-b)|+\frac{3}{2}|b(b-3)|\\
&=\frac{1}{2}ab(b-a)+\frac{3}{2}b(3-b)\ (\because\ 条件\ 0<a<b<3)
\end{aligned}
$$

これを a について整理すると，

$$
\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}(-ba^2+b^2a-3b^2+9b)\\
&=-\frac{b}{2}\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{1}{8}b^3-\frac{3}{2}b^2+\frac{9}{2}b
\end{aligned}
$$

b を固定し，a を $0<a<b$ の範囲で動かすとき，

S は $a=\dfrac{b}{2}$ のときに最大値 $\dfrac{1}{8}b^3-\dfrac{3}{2}b^2+\dfrac{9}{2}b$ をとる。

$g(b)=\dfrac{1}{8}b^3-\dfrac{3}{2}b^2+\dfrac{9}{2}b$　$(0<b<3)$ とすると

$$
\begin{aligned}
g'(b)&=\frac{3}{8}b^2-3b+\frac{9}{2}\\
&=\frac{3}{8}(b^2-8b+12)\\
&=\frac{3}{8}(b-2)(b-6)
\end{aligned}
$$

b	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$g'(b)$		$+$	0	$-$	
$g(b)$		↗	最大	↘	

よって，$b=2$ のとき $g(b)$ は最大となる。

このとき，$a=\dfrac{b}{2}=\dfrac{2}{2}=1$

以上から，四角形 OABC の面積が最大になる a，b の値は

$a=1$，$b=2$ …答

(2) $\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$

$$\overrightarrow{AO}=-\begin{pmatrix} a \\ a(4-a) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a \\ a(a-4) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a \\ a(4-a) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3-a \\ a^2-4a+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3-a \\ (a-3)(a-1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AO}|&=\sqrt{(-a)^2+a^2(a-4)^2}\\&=a\sqrt{a^2-8a+17}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AC}|&=\sqrt{(3-a)^2+(a-3)^2(a-1)^2}\\&=\sqrt{(3-a)^2\{1+(a-1)^2\}}\\&=|3-a|\sqrt{a^2-2a+2}\\&=(3-a)\sqrt{a^2-2a+2}\quad(\because\ 条件\ 0<a<3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}&=-a(3-a)+a(a-4)(a-3)(a-1)\\&=-a(3-a)-a(a-4)(3-a)(a-1)\\&=-a(3-a)\{1+(a-4)(a-1)\}\\&=-a(3-a)(a^2-5a+5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\angle OAC&=\frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AC}|}\\&=\frac{-a(3-a)(a^2-5a+5)}{a\sqrt{a^2-8a+17}\cdot(3-a)\sqrt{a^2-2a+2}}\\&=\frac{-(a^2-5a+5)}{\sqrt{a^2-8a+17}\cdot\sqrt{a^2-2a+2}}\end{aligned}$$

$a^2-5a+5=p$ とおくと

$$\begin{cases}a^2-8a+17=(a^2-5a+5)-3a+12=p-3a+12\\a^2-2a+2=(a^2-5a+5)+3a-3=p+3a-3\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\cos\angle OAC&=\frac{-p}{\sqrt{p-3a+12}\cdot\sqrt{p+3a-3}}\\&=\frac{-p}{\sqrt{p^2+9p-9(a-4)(a-1)}}\\&=\frac{-p}{\sqrt{p^2+9p-9(a^2-5a+4)}}\\&=\frac{-p}{\sqrt{p^2+9p-9(p-1)}}\quad(\because a^2-5a+4=p-1)\\&=\frac{-p}{\sqrt{p^2+9}}\end{aligned}$$

ここで，$p=\left(a-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$ …(*) で，$0<a<3$ より，$-\frac{5}{4}\leqq p<5$

0 から π までの範囲では

$\angle OAC$ が最小 $\Leftrightarrow$ $\cos\angle OAC$ が最大

よって，$p<0$ のときを考えればよく，このとき，$p=-p'$ $(p'>0)$ とおくことで

$$\begin{aligned}\cos\angle OAC&=\frac{p'}{\sqrt{p'^2+9}}\\&=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{p'^2}}}\end{aligned}$$

$0<p'\leqq\frac{5}{4}$ であるため，$p'=\frac{5}{4}$ のとき，$\cos\angle OAC$ は最大となり $\angle OAC$ は最小となる。

よって，$p=-\frac{5}{4}$ のとき $\angle OAC$ は最小である。

このとき (*) より，$a=\frac{5}{2}$ である。

以上から，$\angle OAC$ を最小にする a の値は $a=\frac{5}{2}$ …答

【戦略 2】(1) について

$S=\frac{1}{2}ab(b-a)+\frac{3}{2}b(3-b)$ としたあと，【解 1】のように展開して a についての 2 次関数と見るよりも，$\frac{3}{2}b(3-b)$ という項には a が入っていない事に目を付け，このまま a について微分してしまうと多少楽に処理できます。

【解 2】(1) について

$S=\frac{1}{2}ab(b-a)+\frac{3}{2}b(3-b)$ を得るまでは【解 1】と同じ

$$\begin{aligned}S'&=\frac{b}{2}\{1\cdot(b-a)+a\cdot(-1)\}\\&=\frac{b}{2}(b-2a)\end{aligned}$$

a	(0)	…	$\frac{b}{2}$	…	(b)
S'		+	0	−	
S		↗	最大	↘	

よって，$a=\frac{b}{2}$ のとき，S は最大となる。

このとき，

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot b\left(b-\frac{b}{2}\right)+\frac{3}{2}b(3-b)\\&=\frac{1}{8}b^3-\frac{3}{2}b^2+\frac{9}{2}b\end{aligned}$$

以下【解 1】と同じ

【戦略 3】(2) について

座標平面上で角度を扱う際の有力手段としては

傾きと tan の関係の利用

という方法もあります。

この場合，反時計回りの向きを角度の正の向きとして測ることは徹底しましょう。

【解 3】(2) について

直線 OA の傾きは $\dfrac{a(4-a)}{a}=4-a$

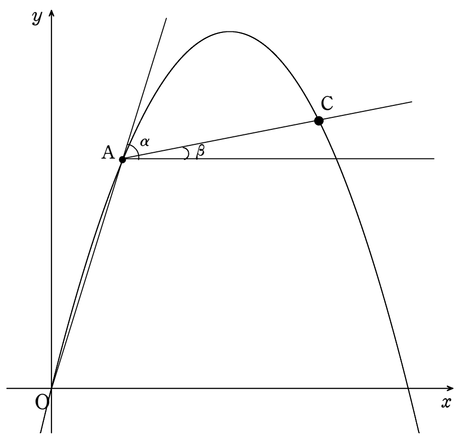
直線 ACの傾きは $\dfrac{3-a(4-a)}{3-a}=\dfrac{a^2-4a+3}{3-a}=\dfrac{(a-3)(a-1)}{3-a}=1-a$

直線 OA，ACのなす角を θ とする。

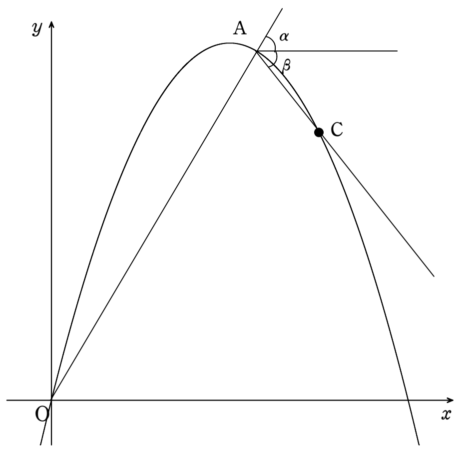
$\theta=90^\circ$ となるのは $(4-a)(1-a)=-1$，すなわち $a^2-5a+5=0$ のとき

$0<a<3$ の範囲では $a=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$ のときに $\theta=90^\circ$ となる。

$\begin{cases}\tan\alpha=(\text{直線 OA の傾き})=4-a\\ \tan\beta=(\text{直線 AC の傾き})=1-a\end{cases}$ となるように α，β を考える。



このとき，$\angle\mathrm{OAC}=\pi-(\alpha-\beta)$



このとき，$\angle\mathrm{OAC}=\pi-(\alpha-\beta)$

いずれにせよ，

$$\angle\mathrm{OAC}=\pi-(\alpha-\beta)$$

よって，$\alpha-\beta$ が最大となるときを考えればよい。

$a\fallingdotseq\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$ のとき，(このとき $a^2-5a+5\fallingdotseq 0$)

$$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta)&=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\\&=\frac{(4-a)-(1-a)}{1+(4-a)(1-a)}\\&=\frac{3}{a^2-5a+5}\\&=\frac{3}{\left(a-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}\end{aligned}$$

$\alpha-\beta$ が最大となるときを考えるにあたって，$\alpha-\beta$ が鈍角となることはあり得るため，$\alpha-\beta$ が鋭角となるときは考える必要はない。

したがって，$\tan(\alpha-\beta)$ が負の値となるようなときを考えればよい。

$a^2-5a+5<0$ となるような a の範囲は $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}<a<\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$ であり，

$0<a<3$ であることも考えると $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}<a<3$

この範囲で $\tan(\alpha-\beta)$ が最大となるような a の値は $a=\dfrac{5}{2}$

以上から，$\angle\mathrm{OAC}$ が最小となるような a の値は $a=\dfrac{5}{2}$ …答

【総括】

(1) はできればむやみに展開せず，【解 2】でスマートに倒したいものです。

(相手が 2 次関数であっても微分を持ち出すのは有力手段です。)

(2) はベクトルの内積経由にせよ，傾きと tan 経由にせよ，最後の数式処理がウルサイことになります。

【解 1】で $\dfrac{-p}{\sqrt{p^2+9}}$ から乱暴に $\dfrac{-1}{\sqrt{1+\frac{9}{p^2}}}$ とは出来ません。

$$\frac{-p}{\sqrt{p^2+9}}=\frac{\frac{-p}{p}}{\frac{\sqrt{p^2+9}}{p}}=\frac{-1}{\sqrt{\frac{p^2+9}{p^2}}}$$

ここが繋がりません

$\sqrt{p^2}=p$ ではなく

$\sqrt{p^2}=|p|$ です

【解 3】においても一般に $Y=\dfrac{\text{定数}}{X}$ の形において，

X が小さければ小さいほど Y が大きくなるか

というと，そうとも限りません。

例えば $Y=\dfrac{1}{X}$ のとき

$$X=2 \text{ のとき } Y=\frac{1}{2}$$

ここから，X を小さくすれば Y は大きくなるかというとそうでもありません。

$X=-1$ と X を小さくしたにも関わらず，$Y=-1$ で先ほどの $Y=\dfrac{1}{2}$ よりも小さくなります。

このあたりの議論の必要性を嗅ぎ取り，【解 3】のように符号に注意しながら不備なく記述するためには，普段からの学習の丁寧さがモノを言うでしょう。