平面上で定点 A$(0, 0)$，B$(3, 0)$ と曲線 $y=x(3-x)$ $(0<x<3)$ 上の 2 点 C，D を頂点とする四角形を考える。
このような四角形の面積の最大値を求めよ。

< ’90 横浜市立大 >

【戦略 1】

ひとまず C$(c, c(3-c))$，D$(d, d(3-d))$ $(0<d<c<3)$ などと座標設定をしないことには面積を立式できません。

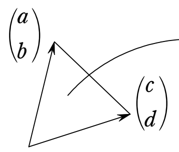
c，d は範囲の制限はあるものの，独立に動く独立 2 変数なので，今回の四角形 ABCD の面積 S は c，d についての独立 2 変数関数であり，その最大値を求めるということになります。

独立 2 変数関数の最大を考える際の最有力候補は，もちろん予選決勝法です。

今回はひとまず d を固定し，c を動かすことにします。

d を固定するということは，図形的には点 D を固定するということであり S が最大となるときを考えるにあたっては，△BCD の面積が最大となる瞬間を捉えればよいことになります。

△BCD の面積については

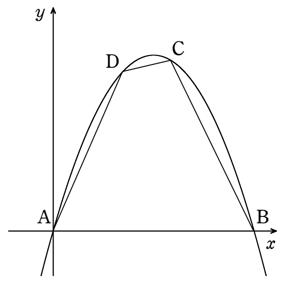


面積： $\dfrac{1}{2}|ad-bc|$

というベクトルの面積公式 (成分 Ver) を用いるのが一番手っ取り早いでしょう。

なお，今回の計算を進めるにあたっては，なるべくむやみやたらに展開せずに処理することを考えましょう。

【解 1】



四角形 ABCD の面積を S とする。

$0<d<c<3$ として

C$(c, c(3-c))$
D$(d, d(3-d))$

とする。

まず D を固定して考える。

このとき，S が最大となるのは △BCD の面積が最大となるときである。

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} c \\ c(3-c) \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c-3 \\ c(3-c) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} d \\ d(3-d) \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d-3 \\ d(3-d) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\triangle BCD &= \frac{1}{2}|d(3-d)(c-3)-c(3-c)(d-3)| \\
&= \frac{1}{2}|-d(3-d)(3-c)+c(3-c)(3-d)| \\
&= \frac{1}{2}|(3-c)(3-d)(c-d)| \\
&= \frac{1}{2}(3-d)(c-d)(3-c) \quad (\because 0<d<c<3)
\end{aligned}$$

d が固定されているとき，△BCD の面積は c についての 2 次関数と見なせるので，△BCD の面積を $T(c)$ とすると

$$\begin{aligned}
T'(c) &= \frac{1}{2}(3-d)\{1\cdot(3-c)+(c-d)\cdot(-1)\} \\
&= \frac{1}{2}(3-d)(-2c+d+3)
\end{aligned}$$

c	(0)	$\cdots$	$\dfrac{d+3}{2}$	$\cdots$	(3)
$T'(c)$		$+$	0	$-$	
$T(c)$		↗	最大	↘	

ゆえに，$c=\dfrac{d+3}{2}$ のとき，△BCD の面積 $T(c)$ は最大となる。

$\triangle ABD=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot d(3-d)=\dfrac{3}{2}d(3-d)$ であるため，このときの S は

$$\begin{aligned}
S &= \triangle ABD+\triangle BCD \\
&= \frac{3}{2}d(3-d)+\frac{1}{2}(3-d)\left(\frac{d+3}{2}-d\right)\left(3-\frac{d+3}{2}\right) \\
&= \frac{3}{2}d(3-d)+\frac{1}{2}(3-d)\cdot\frac{3-d}{2}\cdot\frac{3-d}{2} \\
&= \frac{3-d}{8}\{12d+(3-d)^2\} \\
&= \frac{1}{8}(3-d)(d^2+6d+9)
\end{aligned}$$

$$S'=\frac{1}{8}\{(-1)(d^2+6d+9)+(3-d)(2d+6)\}$$
$$=\frac{1}{8}(-3d^2-6d+9)$$
$$=-\frac{3}{8}(d^2+2d-3)$$
$$=-\frac{3}{8}(d+3)(d-1)$$

d	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(3)
S'		$+$	0	$-$	
S		↗	4	↘	

よって，$d=1$ のとき，S は最大となる。

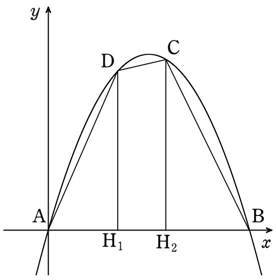
このとき，$c=\frac{1+3}{2}=2$

以上から，C(2，2)，D(1，2) のとき，四角形 ABCD の面積は最大となり，その最大値は

最大値 4 … 答

【戦略 2】

今回の四角形の面積 S は



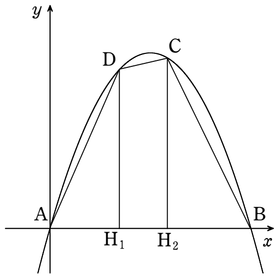
$$S=\triangle ADH_1+\triangle BCH_2+(台形\ DH_1H_2C)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot d\cdot d(3-d)+\frac{1}{2}\cdot(3-c)\cdot c(3-c)+\frac{1}{2}(c-d)\{d(3-d)+c(3-c)\}$$
$$=\frac{1}{2}d^2(3-d)+\frac{1}{2}c(3-c)^2+\frac{1}{2}d(c-d)(3-d)+\frac{1}{2}c(c-d)(3-c)$$
$$=\frac{1}{2}d(3-d)\{d+(c-d)\}+\frac{1}{2}c(3-c)\{(3-c)+(c-d)\}$$
$$=\frac{1}{2}cd(3-d)+\frac{1}{2}c(3-c)(3-d)$$
$$=\frac{1}{2}c(3-d)\{d+(3-c)\}$$
$$=\frac{1}{2}c(3-d)(d+3-c)$$

という計算結果になります。

ここから予選決勝法に走るのも一つの手です。

【解 2】

四角形 ABCD の面積を $S(c，d)$ とする。



$0<d<c<3$ として

C$(c，c(3-c))$
D$(d，d(3-d))$

とし，(図 1) のように垂線 DH_1，CH_2 を下ろす。

$$S(c，d)=\triangle ADH_1+\triangle BCH_2+(台形\ DH_1H_2C)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot d\cdot d(3-d)+\frac{1}{2}\cdot(3-c)\cdot c(3-c)+\frac{1}{2}(c-d)\{d(3-d)+c(3-c)\}$$
$$=\frac{1}{2}d^2(3-d)+\frac{1}{2}c(3-c)^2+\frac{1}{2}d(c-d)(3-d)+\frac{1}{2}c(c-d)(3-c)$$
$$=\frac{1}{2}d(3-d)\{d+(c-d)\}+\frac{1}{2}c(3-c)\{(3-c)+(c-d)\}$$
$$=\frac{1}{2}cd(3-d)+\frac{1}{2}c(3-c)(3-d)$$
$$=\frac{1}{2}c(3-d)(d+3-c)$$

d を固定して c の関数と見て，$S(c，d)$ を c で微分すると

$$S'(c，d)=\frac{1}{2}(3-d)\{1\cdot(d+3-c)+c\cdot(-1)\}$$
$$=\frac{1}{2}(3-d)(-2c+d+3)$$

c	(0)	$\cdots$	$\frac{d+3}{2}$	$\cdots$	(3)
$S'(c，d)$		$+$	0	$-$	
$S(c，d)$		↗	最大	↘	

ゆえに，$c=\frac{d+3}{2}$ のとき，すなわち $S\left(\frac{d+3}{2}，d\right)$ が最大となる。

このとき，$S\left(\frac{d+3}{2}，d\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{d+3}{2}\cdot(3-d)\cdot\left\{d+3-\frac{d+3}{2}\right\}$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{d+3}{2}\cdot(3-d)\cdot\frac{d+3}{2}$$
$$=\frac{1}{8}(3-d)(d^2+6d+9)$$

$$S'\left(\frac{d+3}{2}，d\right)=\frac{1}{8}\{(-1)(d^2+6d+9)+(3-d)(2d+6)\}$$
$$=\frac{1}{8}(-3d^2-6d+9)$$
$$=-\frac{3}{8}(d^2+2d-3)$$
$$=-\frac{3}{8}(d+3)(d-1)$$

d	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(3)
$S'\left(\frac{d+3}{2}，d\right)$		$+$	0	$-$	
$S\left(\frac{d+3}{2}，d\right)$		↗	4	↘	

よって，$d=1$ のとき，すなわち $S(2，1)$ が最大となる。

以上から，C(2，2)，D(1，2) のとき，四角形 ABCD の面積は最大となり，その最大値は

最大値 4 … 答

【戦略 3】

【戦略 2】において

$$S=\frac{1}{2}c(3-d)(d+3-c)$$

と得た後に，相加平均・相乗平均が頭をよぎれば一発で仕留められます。

もちろん，不等式から最大最小を求める場合は，等号成立条件に言及しなければならないことは忘れないようにしましょう。

【解 3】

$S=\frac{1}{2}c(3-d)(d+3-c)$ を得る部分までは【解 2】と同じ

ーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーー

$0<d<c<3$ であるから

$$c>0,\ 3-d>0,\ d+3-c>0$$

よって，相加平均・相乗平均の関係から

$$\frac{c+(3-d)+(d+3-c)}{3}\geqq\sqrt[3]{c(3-d)(d+3-c)}$$

すなわち，$\sqrt[3]{c(3-d)(d+3-c)}\leqq 2$ であるため

$$c(3-d)(d+3-c)\leqq 8$$

ゆえに，$S=\frac{1}{2}c(3-d)(d+3-c)\leqq 4$

等号が成立するとき，

$$c=3-d=d+3-c$$

すなわち $\begin{cases} c=3-d \\ 3-d=d+3-c \end{cases}$ が成立する。

この連立方程式を解けば，$c=2$，$d=1$ を得る。

以上から，C$(2,\ 2)$，D$(1,\ 2)$ のとき，四角形 ABCD の面積は最大となり，その最大値は

最大値 4 … 答

【総括】

一見簡単そうに見えますが，手際が悪かったりすると案外ポシャってしまいかねません。

四角形 ABCD の面積をどのように捌いていくかですが，

三角形 2 個に分割する （【解 1】）

三角形 2 個＆台形に分割する（【解 2】【解 3】）

のがパッと思いつきやすい方針かと思います。

さらに【解 1】では，△BCD の面積を

直線 BD の式：$dx+y-3d=0$ と，点 C との距離 h を

$$\begin{aligned} h&=\frac{|dc+c(3-c)-3d|}{\sqrt{d^2+1}} \\ &=\frac{|d(c-3)+c(3-c)|}{\sqrt{d^2+1}} \\ &=\frac{|(3-c)(c-d)|}{\sqrt{d^2+1}} \\ &=\frac{(3-c)(c-d)}{\sqrt{d^2+1}} \quad (0<d<c<3 \text{ より}) \end{aligned}$$

と点と直線の距離公式で求めて，

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{BCD}&=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(3-d)^2+\{d(3-d)\}^2}\cdot\frac{(3-c)(c-d)}{\sqrt{d^2+1}} \\ &=\frac{1}{2}(3-d)\sqrt{d^2+1}\cdot\frac{(3-c)(c-d)}{\sqrt{d^2+1}} \\ &=\frac{1}{2}(3-d)(3-c)(c-d) \end{aligned}$$

と捌いていってもよいでしょう。

いずれにせよ，面積を立式し，独立２変数関数を適切に扱う確かな力が要求されています。