p を $p>0$ である定数とし，放物線 $C: y=\dfrac{1}{4p}x^2$ 上の相異なる任意の3点においてそれぞれ接線 ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3 を引く。

これら ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3 によってできる三角形の外接円は，放物線 C の焦点を通ることを示せ。

【戦略】

3 接線の式を立式する。
→ 連立して3 つの交点を求める。
→ それら 3 点を通る円の方程式を出す
→ 焦点 $(0,\ p)$ が，その円上にあるかを確認する

と，方針面では無茶は言っていないと分かるでしょう。

ただ，実際に「外接円の方程式を出す」部分でまともにぶつかるととんでもない計算になりそうです。

例えば 3 点 (a,b)，$(c,\ d)$，$(e,\ f)$ という 3 点を通る円の方程式を求めたければ

$$x^2+y^2+px+qy+r=0$$

とおき，これら 3 点がこの円上にあることから

$$\begin{cases} a^2+b^2+ap+bq+r=0 \\ c^2+d^2+cp+dq+r=0 \\ e^2+f^2+ep+fq+r=0 \end{cases}$$

という p，q，r に関する連立方程式を解く

というのが正攻法です。

今回，放物線の接点を $\left(t_1,\ \dfrac{1}{4p}{t_1}^2\right)$，$\left(t_2,\ \dfrac{1}{4p}{t_2}^2\right)$，$\left(t_3,\ \dfrac{1}{4p}{t_3}^2\right)$ と設定して接線の式を立て，交点を求めると

$$\left(\frac{t_1+t_2}{2},\ \frac{t_1t_2}{4p}\right),\ \left(\frac{t_2+t_3}{2},\ \frac{t_2t_3}{4p}\right),\ \left(\frac{t_3+t_1}{2},\ \frac{t_3t_1}{4p}\right)$$

となりますが，上の正攻法で連立方程式を解くという作業は億劫でしかありません。

そこで，以下の

> **$(a,\ b)$，$(c,\ d)$ を通る円の方程式は，実数 k を用いて**
>
> $(x-a)(x-c)+(y-b)(y-d)+k(px+qy+r)=0 \ \cdots(*)$
> **(ただし，$px+qy+r=0$ は $(a,\ b)$，$(c,\ d)$ を通る直線)**
>
> **と表せる。**

という上級テクを使います。

$(*)$ が $(a,\ b)$，$(c,\ d)$ を通るということは $(*)$ という等式が成り立つかどうかをチェックすれば容易に確かめられます。

さらに，細かなことを抜きにすれば $(*)$ が表す図形は円であることも分かるでしょう。

【解答】

接線 ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3 の接点をそれぞれ

$$\left(t_1,\ \frac{1}{4p}{t_1}^2\right),\ \left(t_2,\ \frac{1}{4p}{t_2}^2\right),\ \left(t_3,\ \frac{1}{4p}{t_3}^2\right)$$

とする。$(t_1 \fallingdotseq t_2,\ t_2 \fallingdotseq t_3,\ t_3 \fallingdotseq t_1)$

$y=\dfrac{1}{4p}x^2$ において，$y'=\dfrac{1}{2p}x$ であるから，ℓ_1 の方程式は

$$y=\frac{t_1}{2p}(x-t_1)+\frac{1}{4p}{t_1}^2$$

すなわち

$$y=\frac{t_1}{2p}x-\frac{{t_1}^2}{4p} \ \cdots ①$$

同様に，ℓ_2 の方程式は

$$y=\frac{t_2}{2p}x-\frac{{t_2}^2}{4p} \ \cdots ②$$

ℓ_3 の方程式は

$$y=\frac{t_3}{2p}x-\frac{{t_3}^2}{4p}$$

ℓ_1，ℓ_2 の交点を求めるために ①，② を連立して y を消去すると

$$\frac{t_1}{2p}x-\frac{{t_1}^2}{4p}=\frac{t_2}{2p}x-\frac{{t_2}^2}{4p}$$

$$2t_1x-{t_1}^2=2t_2x-{t_2}^2$$

$$2(t_1-t_2)x={t_1}^2-{t_2}^2$$

$$2(t_1-t_2)x=(t_1+t_2)(t_1-t_2)$$

$t_1 \fallingdotseq t_2$ より，$x=\dfrac{t_1+t_2}{2}$ を得て，このとき，

$$y=\frac{t_1}{2p}x-\frac{{t_1}^2}{4p}=\frac{t_1}{2p}\cdot\frac{t_1+t_2}{2}-\frac{{t_1}^2}{4p}=\frac{t_1t_2}{4p}$$

よって，ℓ_1，ℓ_2 の交点の座標は $\left(\dfrac{t_1+t_2}{2},\ \dfrac{t_1t_2}{4p}\right)$

同様に

ℓ_2，ℓ_3 の交点の座標は $\left(\dfrac{t_2+t_3}{2},\ \dfrac{t_2t_3}{4p}\right)$
ℓ_3，ℓ_1 の交点の座標は $\left(\dfrac{t_3+t_1}{2},\ \dfrac{t_3t_1}{4p}\right)$

ここで，$\left(\dfrac{t_1+t_2}{2},\ \dfrac{t_1t_2}{4p}\right)$，$\left(\dfrac{t_2+t_3}{2},\ \dfrac{t_2t_3}{4p}\right)$ を通る円の方程式は，実数 k を用いて

$$\left(x-\frac{t_1+t_2}{2}\right)\left(x-\frac{t_2+t_3}{2}\right)+\left(y-\frac{t_1t_2}{4p}\right)\left(y-\frac{t_2t_3}{4p}\right)+k(2t_2x-4py-{t_2}^2)=0$$

と表せる。$\cdots(*)$

これが $\left(\dfrac{t_3+t_1}{2}\,,\ \dfrac{t_3t_1}{4p}\right)$ を通るので

$$\left(\frac{t_3+t_1}{2}-\frac{t_1+t_2}{2}\right)\left(\frac{t_3+t_1}{2}-\frac{t_2+t_3}{2}\right)+\left(\frac{t_3t_1}{4p}-\frac{t_1t_2}{4p}\right)\left(\frac{t_3t_1}{4p}-\frac{t_2t_3}{4p}\right)+k\left(2t_2\cdot\frac{t_3+t_1}{2}-4p\cdot\frac{t_3t_1}{4p}-t_2{}^2\right)=0$$

$$\frac{t_3-t_2}{2}\cdot\frac{t_1-t_2}{2}+\frac{t_1(t_3-t_2)}{4p}\cdot\frac{t_3(t_1-t_2)}{4p}+k\left\{t_2(t_3+t_1)-t_3t_1-t_2{}^2\right\}=0$$

$$\frac{1}{4}(t_3-t_2)(t_1-t_2)+\frac{t_1t_3}{16p^2}(t_3-t_2)(t_1-t_2)+k\left\{t_2(t_3-t_2)-t_1(t_3-t_2)\right\}=0$$

$$\frac{1}{4}(t_3-t_2)(t_1-t_2)+\frac{t_1t_3}{16p^2}(t_3-t_2)(t_1-t_2)-k(t_3-t_2)(t_1-t_2)=0$$

$t_1 \fallingdotseq t_2$，$t_2 \fallingdotseq t_3$ より，両辺 $(t_3-t_2)(t_1-t_2)$ で割って，

$$\frac{1}{4}+\frac{t_1t_3}{16p^2}-k=0$$

ゆえに，$k=\dfrac{t_1t_3+4p^2}{16p^2}$

$(*)$ に代入すれば

$$\left(x-\frac{t_1+t_2}{2}\right)\left(x-\frac{t_2+t_3}{2}\right)+\left(y-\frac{t_1t_2}{4p}\right)\left(y-\frac{t_2t_3}{4p}\right)+\frac{t_1t_3+4p^2}{16p^2}(2t_2x-4py-t_2{}^2)=0\cdots(☆)$$

であり，これが ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3 によってできる三角形の外接円の方程式である。

$(☆)$ の左辺に $x=0$，$y=p$ を代入すると

$$\left(x-\frac{t_1+t_2}{2}\right)\left(x-\frac{t_2+t_3}{2}\right)+\left(y-\frac{t_1t_2}{4p}\right)\left(y-\frac{t_2t_3}{4p}\right)+\frac{t_1t_3+4p^2}{16p^2}(2t_2x-4py-t_2{}^2)$$

$$=\left(0-\frac{t_1+t_2}{2}\right)\left(0-\frac{t_2+t_3}{2}\right)+\left(p-\frac{t_1t_2}{4p}\right)\left(p-\frac{t_2t_3}{4p}\right)+\frac{t_1t_3+4p^2}{16p^2}(2t_2\cdot 0-4p^2-t_2{}^2)$$

$$=\frac{1}{4}(t_1+t_2)(t_2+t_3)+\frac{4p^2-t_1t_2}{4p}\cdot\frac{4p^2-t_2t_3}{4p}-\frac{t_1t_3+4p^2}{16p^2}(4p^2+t_2{}^2)$$

$$=\frac{1}{4}(t_1+t_2)(t_2+t_3)+\frac{1}{16p^2}\left\{(4p^2-t_1t_2)(4p^2-t_2t_3)-(t_1t_3+4p^2)(4p^2+t_2{}^2)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}(t_1+t_2)(t_2+t_3)+\frac{1}{16p^2}\left\{-4p^2(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1+t_2{}^2)\right\}$$

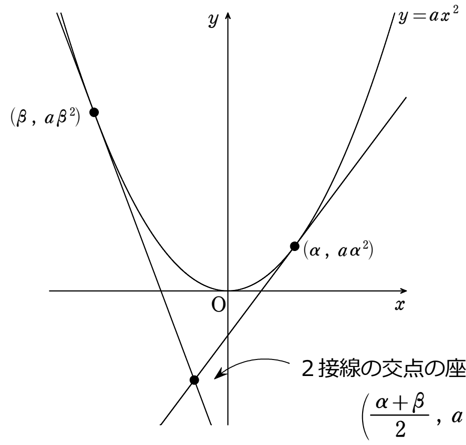
$$=\frac{1}{4}(t_1+t_2)(t_2+t_3)-\frac{1}{4}\left\{t_2(t_1+t_2)+t_3(t_1+t_2)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}(t_1+t_2)(t_2+t_3)-\frac{1}{4}(t_1+t_2)(t_2+t_3)$$

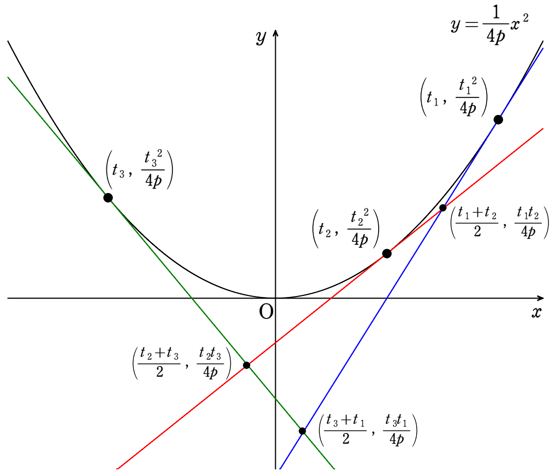
$$=0$$

となり，$(☆)$ は C の焦点 $(0,\ p)$ を通る。

【総括】



２接線の交点の座標が $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\,,\ a\alpha\beta\right)$ となる事は，結果ごと常識にしておくと便利です。



解答で用いた

> $(a,\ b)$，$(c,\ d)$ を通る円の方程式は，実数 k を用いて
>
> $$(x-a)(x-c)+(y-b)(y-d)+k(px+qy+r)=0$$
>
> （ただし，$px+qy+r=0$ は $(a,\ b)$，$(c,\ d)$ を通る直線）
>
> と表せる。

という上級テクを本問と照らし合わせながら使ってみると

$\left(\dfrac{t_1+t_2}{2}\,,\ \dfrac{t_1t_2}{4p}\right)$，$\left(\dfrac{t_2+t_3}{2}\,,\ \dfrac{t_2t_3}{4p}\right)$ を通る円は

$$\left(x-\frac{t_1+t_2}{2}\right)\left(x-\frac{t_2+t_3}{2}\right)+\left(y-\frac{t_1t_2}{4p}\right)\left(y-\frac{t_2t_3}{4p}\right)+k(2t_2x-4py-t_2{}^2)=0$$

> $\left(\dfrac{t_1+t_2}{2}\,,\ \dfrac{t_1t_2}{4p}\right)$，$\left(\dfrac{t_2+t_3}{2}\,,\ \dfrac{t_2t_3}{4p}\right)$ を通る直線は ℓ_2 であり
>
> ℓ_2 の式は $y=\dfrac{t_2}{2p}x-\dfrac{t_2{}^2}{4p}$，すなわち $2t_2x-4py-t_2{}^2=0$ です。

ということになります。