p を $p>0$ を満たす定数とし，放物線 $C: y^2=4px$ の焦点を F とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 F から放物線 C の任意の接線に下ろした垂線の足の軌跡を求めよ。

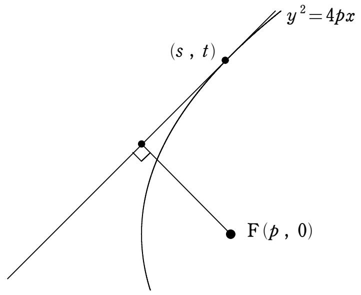
(2) 放物線 C の任意の 3 接線がつくる三角形の外接円は，F を通ることを証明せよ。

＜ ’62 東京農工大 ＞

【戦略】

(1) **手なりに数式処理で進めていき問題はありません。**

$(s,\ t)$ における接線の式を立て，F$(p,\ 0)$ を通り，それに垂直な直線を立式して交点を求めます。

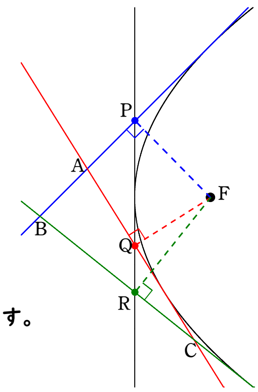


$t=0$ のときの接線に傾きがなくなりますから，ひとまず $t\neq 0$ のときを考え，$t=0$ のときの垂線の足については個別検証しましょう。
（結果的に $t\neq 0$ のときの結果は $t=0$ のときの結果も含みます。）

(2) **若干図がウルサイのですが，(1) の結果を踏まえ，(図 1) のように状況を整理します。**

結局示すべきは
4 点 A，B，C，F が同一円周上にあるということです。

垂直であるという状況に目を向け
四角形 FQRC
四角形 AQFP
がそれぞれ円に内接することに注目します。



(図 1)

【解答】

(1) $y^2=4px$ の両辺を x で微分すると

$$2y\cdot\frac{dy}{dx}=4p$$

であるため，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2p}{y}$

したがって，$(s,\ t)\ (t\neq 0)$ における接線は $y=\dfrac{2p}{t}(x-s)+t$

整理すると，$y=\dfrac{2p}{t}x-\dfrac{2ps-t^2}{t}$

$(s,\ t)$ が C 上の点であることに注意すると，$t^2=4ps$ であり

$y=\dfrac{2p}{t}x-\dfrac{2p\cdot\dfrac{t^2}{4p}-t^2}{t}$， すなわち $y=\dfrac{2p}{t}x+\dfrac{t}{2}$ $\cdots(*)$

F$(p,\ 0)$ であり，F を通り $(*)$ に垂直な直線の方程式は

$$y=-\frac{t}{2p}(x-p)$$

整理すると，$y=-\dfrac{t}{2p}x+\dfrac{t}{2}$

$(*)$，$(**)$ の交点を求めるために 2 式を連立して y を消去すると

$$\frac{2p}{t}x+\frac{t}{2}=-\frac{t}{2p}x+\frac{t}{2}$$

整理すると，$\left(\dfrac{2p}{t}+\dfrac{t}{2p}\right)x=0$

$p>0$，$t\neq 0$ より，$x=0$ を得て，このとき，$y=\dfrac{t}{2}$

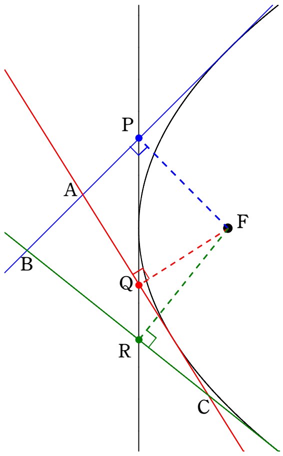
つまり，C の $(s,\ t)$ における接線 $(*)$ と，$(p,\ 0)$ を通る $(*)$ に垂直な直線 $(**)$ の交点は $\left(0,\ \dfrac{t}{2}\right)$ である。$\cdots$(☆)

なお，$t=0$ のとき，すなわち $(0,\ 0)$ における C の接線は $x=0$ であり，$(p,\ 0)$ から $x=0$ へ下ろした垂線の足は $(0,\ 0)$ である。

これは (☆) が $t=0$ のときも正しいことを意味する。

以上から，求める軌跡は直線 $x=0$ $\cdots$ 答

(2)



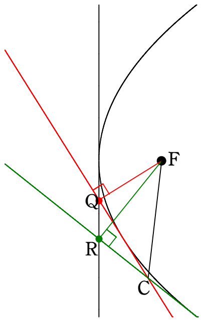
(図 1)

放物線 C の 3 接線によってできる三角形を $\triangle \mathrm{ABC}$ とし，放物線 C の 3 接線に焦点 F から下ろした垂線の足を (図 1) のように P，Q，R と定める。

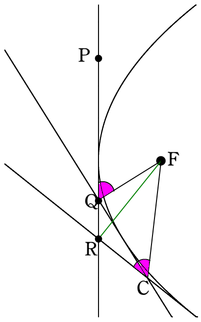
四角形 FQRC に注目すると，この四角形 FQRC は線分 FC を直径にもつ円に内接する。
((図 2－1) 参照)

これより，

$\angle \mathrm{FCR}=\angle \mathrm{FQP}$ … ①
((図 2－2) 参照)



(図 2－1)

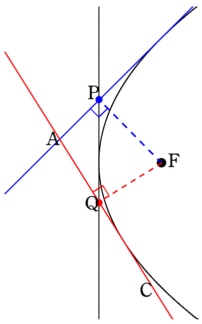


(図 2－2)

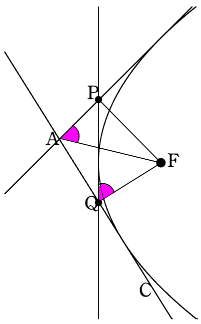
一方，

四角形 AQFP に注目すると，
$\angle \mathrm{APF}+\angle \mathrm{AQF}=\pi$
より，この四角形 AQFP は円に内接する。
((図 3－1) 参照)

円周角の定理から
$\angle \mathrm{FQP}=\angle \mathrm{FAP}$ … ②
((図 3－2) 参照)



(図 3－1)



(図 3－2)

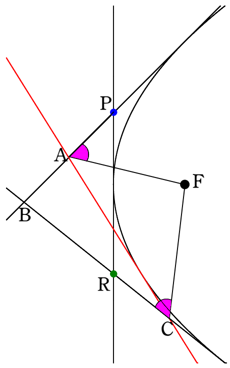
①，② より

$\angle \mathrm{FCR}=\angle \mathrm{FAP}$ … ③

したがって

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{FAB}+\angle \mathrm{FCB}&=(\pi-\angle \mathrm{FAP})+\angle \mathrm{FCR}\\&=\pi \ (\because ③)\end{aligned}$$
((図 4) 参照)

よって，4 点 A，B，C，F は同一円周上にあることが言え，題意は示された。



(図 4)

【総括】

(1) の結果もさることながら，(2) の主張が美しいですね。

なお，本問の (2) の主張は「シムソンの定理」と呼ばれる次の定理によりただちに証明できてしまいます。

シムソンの定理

$\triangle \mathrm{ABC}$ の外接円上の点を X とする。(X は A，B，C とは異なる点)
X から 3 直線 AB，BC，CA に下ろした垂線の足をそれぞれ P，Q，R とするとき，P，Q，R は同一直線上にある。

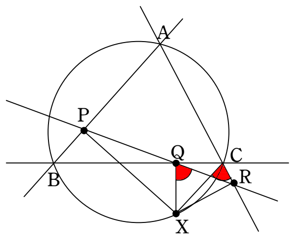
逆に，点 X から 3 直線 AB，BC，CA に下ろした垂線の足をそれぞれ P，Q，R とし，P，Q，R が同一直線上にあるとき，X は $\triangle \mathrm{ABC}$ の外接円上にある。

(証明)

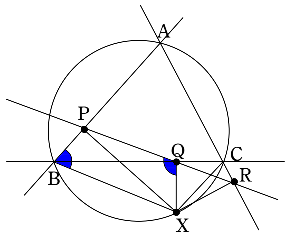
X が $\triangle \mathrm{ABC}$ の外接円上にある $\Leftrightarrow$ P，Q，R が同一直線上

という同値性を示せばよい。

四角形 QXRC は円に内接し
円周角の定理から
$\angle \mathrm{RQX}=\angle \mathrm{RCX}$ … ①



四角形 PBXQ は円に内接し
$\angle \mathrm{PBX}+\angle \mathrm{PQX}=\pi$ … ②



($\Longrightarrow$ について)

X が $\triangle \mathrm{ABC}$ の外接円上にあるとき $\angle \mathrm{ABX}+\angle \mathrm{ACX}=\pi$

よって，$\angle \mathrm{RCX}=\pi-\mathrm{ACX}=\angle \mathrm{ABX}$

② より

したがって，$\angle \mathrm{PQX}+\angle \mathrm{RQX}=(\pi-\angle \mathrm{PBX})+\angle \mathrm{RQX}$
$=\pi$

となり，P，Q，R は同一直線上にある。

($\Longleftarrow$ について)

P，Q，R が同一直線上にあるとき，$\angle \mathrm{PQX}+\angle \mathrm{RQX}=\pi$

よって，$\angle \mathrm{RQX}=\pi-\angle \mathrm{PQX}=\angle \mathrm{PBX}$

したがって，$\angle \mathrm{ABX}+\angle \mathrm{ACX}=\angle \mathrm{PBX}+(\pi-\angle \mathrm{RCX})$
$=\pi$

となり，4 点 A，B，C，X は同一円周上にある。